

**Formale kinetische Theorie eines Gasgemisches
aus Spinteilchen mit besonderer Anwendung
auf den Senftleben-Beenakker-Effekt
der Diffusion, Viskosität und Diffusiophorese**

von
Hilmar Raum
aus
Nürnberg



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546302_0046

**Formale kinetische Theorie eines Gasgemisches
aus Spinteilchen mit besonderer Anwendung
auf den Senftleben-Beenakker-Effekt
der Diffusion, Viskosität und Diffusiophorese**

Der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
zur
Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt
von
Hilmar Raum
aus
Nürnberg

Erlangen 1968

Als Dissertation genehmigt
von der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Erlangen-Nürnberg



Tag der mündlichen Prüfung: 27. November 1968

Dekan:	Prof. Dr. H. Wegener
Erstberichterstatter:	Prof. Dr. L. Waldmann
Zweitberichterstatter:	Prof. Dr. H. Volz

I n h a l t

Seite

<u>A</u>	<u>Aussagen der nichtlinearen Boltzmann-Gleichungen eines</u> <u>K - Komponentigen Gasgemisches aus Spinteilchen</u>	
§ 1	Bezeichnungen, Boltzmann-Gleichungen	1
§ 2	Erhaltungssätze	6
<u>B</u>	<u>Allgemeine Betrachtungen der linearisierten Boltzmann-Gleichungen</u>	
§ 3	Lineare Stoßoperatoren	8
§ 4	Klammersymbole und deren Symmetrien	10
<u>C</u>	<u>Lösungstheorie der linearisierten Boltzmann-Gleichungen</u>	
§ 5	Das Momentenverfahren zur Lösung der Boltzmann-Gleichungen	16
§ 6	Das verstümmelte System der T.R.G.'en für ein spezielles Entwicklungssystem	22
§ 7	Vorläufige Diskussion der speziellen T.R.G.'en	30
<u>D</u>	<u>Diffusion und Viskosität im Magnetfeld</u>	
§ 8	Die Näherung der kleinen Nichtsphärizität	32
§ 9	Diffusion im binären Gasgemisch	35
§ 10	Reibungsdruck und Diffusionsdruck im binären Gasgemisch	43
<u>E</u>	<u>Hydrodynamische Anwendungen</u>	
§ 11	Einleitende Bemerkungen zur Diffusiophorese	49
§ 12	Stationäres Diffusionsproblem um eine ruhende Kugel im homogenen Magnetfeld	51
§ 13	Einfluß eines äußeren homogenen Magnetfeldes auf das stationäre Gleitströmungsproblem	54
§ 14	Die Senftleben - Beenakker - Korrekturen zur diffusio- phoretischen Kraft und zur Stokeskraft	61
§ 15	Vorschlag eines Experimentes zur Messung des Senftleben - Beenakker - Effektes der Diffusion und der Viskosität	64

Zusammenfassung

Ausgehend von der Waldmann-Gleichung für ein nichtreagierendes Gasgemisch aus Spinteilchen, werden im Teil A die Erhaltungssätze formuliert.

Für Gaszustände, die kleine Abweichungen vom thermischen Gleichgewicht darstellen, genügt es sich auf die linearisierte Waldmann-Gleichung zu beschränken. Im Teil B werden deshalb die für das Gasgemisch adäquaten linearen Stoßoperatoren eingeführt und die Symmetrien der daraus gebildeten Klammersymbole untersucht.

Der Teil C skizziert die Lösungstheorie für die linearisierten Waldmann-Gleichungen eines Gasgemisches aus Spinteilchen.

Mit Hilfe der Ergebnisse der ersten drei Teile dieser Arbeit kann dann die Diffusion und die Viskosität eines binären Gasgemisches untersucht werden. Beim Vorhandensein eines äußeren Magnetfeldes entsteht aus der Diffusionskonstante ein Tensor zweiter Stufe. Er wird für den allgemeinen Fall, wo beide Komponenten des Gasgemisches aus Spinteilchen bestehen, durch das Magnetfeld und gewisse Relaxationskonstanten dargestellt. Bei den Überlegungen über die Viskosität werden zunächst alle Zusammenhänge in zweiter hydrodynamischer Näherung aufgeschrieben. Es zeigt sich, daß zum gewöhnlichen Drucktensor, der durch den Gradienten eines Geschwindigkeitsfeldes erzeugt wird, ein zweiter Term hinzukommt, der sogenannte Diffusionsdruck, der durch zweite Ableitungen vom Molenbruch hervorgerufen wird. Bei der Anwendung auf die Diffusiophorese zeigt sich jedoch, daß der Diffusionsdruck keinen direkten Beitrag zur Kraft auf ein Aerosolteilchen im Diffusionsfeld liefert.

Im Teil E interessiert der Einfluß des Magnetfeldes auf die diffusiophoretische Kraft und auf die Stokeskraft. Deshalb wird zunächst das stationäre Gleitströmungsproblem und das stationäre Diffusionsproblem um eine Kugel im Diffusionsfeld mit verallgemeinerten Gleitrandbedingungen gelöst. Die diffusiophoretische Kraft und die Stokeskraft des isotropen Falls bekommen durch ein äußeres Magnetfeld Korrekturen, die vom Senftleben-Beenakker-Effekt der Diffusion und der Viskosität herrühren.

Mit Hilfe eines vorgeschlagenen Experimentes sollte es möglich sein, sowohl den Transversalteil der Stokeskraft als auch den der diffusiophoretischen Kraft zu messen.

Meinem verehrten Lehrer Prof.Dr.L.Waldmann danke ich für die Überlassung dieser Arbeit und für die vielen Hinweise, die zum Fortgang dieser Arbeit beitrugen.

Für die fruchtbaren Diskussionen mit Herrn Dr.S.Hess ,Herrn Dipl.Phys.W.Köhler und Herrn Dipl.Phys.J.Halbritter möchte ich an dieser Stelle meinen Dank aussprechen.

Teil A

Aussagen der nichtlinearen Boltzmann-Gleichungen

eines K-Komponentigen Gasgemisches aus Spinteilchen

§ 1 Bezeichnungen, Boltzmann-Gleichungen

1. Einzelteilchenbeschreibung

Betrachtet sei ein nichtreagierendes Gasgemisch, dessen K Komponenten wir durch Indizes i bzw. j unterscheiden. Bis zur Spezialisierung auf ein binäres Gemisch $K = 2$ gelten die Überlegungen für beliebiges K .

Ein Teilchen der Sorte i mit der Masse m_i beschreiben wir durch den Ort $\underline{x}$, seine Geschwindigkeit $\underline{c}$ und durch die drei kartesischen Komponenten

$$\pi s_{i\mu} \quad \mu = 1, 2, 3$$

des quantenmechanischen Spinvektors πs_i , der in bekannter Weise durch $(2S_i+1)(2S_i+1)$ Matrizen dargestellt werden kann. Der Betrag des Spins der Sorte i , πS_i , ergibt sich aus

$$s_{i\mu} s_{i\mu} = S_i(S_i+1) \quad .$$

Für griechische Indizes, die ausschließlich für die räumlichen Komponenten der Tensoren eines kartesischen Koordinatensystems stehen, vereinbaren wir durch die ganze Arbeit hindurch Summationskonvention.

Die Vertauschungsrelationen notieren wir in der folgenden Form:

$$s_{j\mu} s_{j\nu} - s_{j\nu} s_{j\mu} = i \epsilon_{\mu\nu\lambda} s_{j\lambda} \quad .$$

Der Buchstabe i , nicht als Index gebraucht, steht für die imaginäre Einheit. Der isotrope Tensor dritter Stufe, $\epsilon_{\mu\nu\lambda}$, ist total antisymmetrisch mit

$$\epsilon_{123} = 1 \quad .$$

2. Beschreibung des Stoßes

Wir interessieren uns für Transportvorgänge in diesem Gasgemisch, die durch Zweierstöße bestimmt werden. (Genügende Verdünnung des Gemisches). Dabei sollen Teilchen einer Sorte i sowohl mit Teilchen der gleichen Sorte als auch mit Teilchen jeder anderen Sorte j zusammenstoßen können.

Der Stoßpartner I aus der Sorte i habe vor dem Stoß die Geschwindigkeit $\underline{c}_I'$, der Stoßpartner II aus der Sorte j bewege sich mit der Geschwindigkeit $\underline{c}_{II}'$. Nach dem Stoß liegen die Geschwindigkeiten $\underline{c}_I$ und $\underline{c}_{II}$ vor. Die mechanischen Erhaltungssätze für den elastischen Stoß,

$$\begin{aligned} m_i \underline{c}_I' + m_j \underline{c}_{II}' &= m_i \underline{c}_I + m_j \underline{c}_{II} \\ \frac{m_i}{2} c_I'^2 + \frac{m_j}{2} c_{II}'^2 &= \frac{m_i}{2} c_I^2 + \frac{m_j}{2} c_{II}^2 \end{aligned} \quad ,$$

schreiben sich mit den Definitionen für Schwerpunktsgeschwindigkeiten $\underline{c}_s, \underline{c}_s'$ und die Relativgeschwindigkeiten $\underline{g}', \underline{g}$ vor und nach dem Stoß,

$$\begin{aligned} \underline{c}_s &= \frac{m_i}{m_i + m_j} \underline{c}_I + \frac{m_j}{m_i + m_j} \underline{c}_{II} & \underline{g} &= \underline{c}_I - \underline{c}_{II} = g \underline{e} \\ \underline{c}_s' &= \frac{m_i}{m_i + m_j} \underline{c}_I' + \frac{m_j}{m_i + m_j} \underline{c}_{II}' & \underline{g}' &= \underline{c}_I' - \underline{c}_{II}' = g' \underline{e}' \end{aligned} \quad ,$$

in der einfachen Weise $\underline{c}_s' = \underline{c}_s$, $g' = g$ und liefern mit den Einheitsvektoren $\underline{e}$ und $\underline{e}'$ die Stoßgleichungen in der folgenden Form:

$$\begin{aligned} \underline{c}_I' &= \underline{c}_s + \frac{m_j}{m_i + m_j} g \underline{e}' \\ \underline{c}_{II}' &= \underline{c}_s - \frac{m_i}{m_i + m_j} g \underline{e}' \end{aligned} \quad .$$

1.1

Wir notieren noch das aus diesen Beziehungen folgende Liouvilletheorem:

$$d^3 c_I d^3 c_{II} d^2 e' = d^3 c_I' d^3 c_{II}' d^2 e \quad .$$

1.2

Zur Beschreibung der Orientierungsänderungen der Teilchenspins beim Stoß betrachten wir das quantenmechanische Streuprobblem im Schwerpunktsystem.

Der Betrag des Relativvektors der beiden Teilchenschwerpunkte sei mit r bezeichnet. Die asymptotische Wellenfunktion hat dann die bekannte Gestalt:

$$\psi_{ij} = \left[e^{i k_{ij} r \underline{e} \cdot \underline{e}'} + \frac{1}{r} e^{i k_{ij} r} a_{ij}(\underline{e} \underline{e}' s_{iI} s_{jII} E_{ij}) \right] \chi_{iI} \chi_{jII}.$$

Mit der reduzierten Masse

$$m_{ij} = \frac{m_i m_j}{m_i + m_j}$$

bedeuten

$$k_{ij} = \frac{m_{ij} g}{\hbar}$$

die Wellenzahlen der in Richtung $\underline{e}'$ einlaufenden und in Richtung $\underline{e}$ beobachteten Welle.

Der Streuoperator

$$1.3 \quad a_{ij}(\underline{e} \underline{e}' s_{iI} s_{jII} E_{ij})$$

wirkt auf das direkte Produkt der beiden $(2S_i+1)$ und $(2S_j+1)$ dimensional Spinoren χ_{iI} und χ_{jII} , die den Spinzustand vor dem Stoß charakterisieren. Durch die Stellung der Indizes ij sind die Sorten der Stoßpartner eindeutig festgelegt. Die Abhängigkeit der Streuoperatoren von der Relativenergie

$$E_{ij} = \frac{1}{2} m_{ij} g^2$$

wird im folgenden nicht mehr explizit angedeutet werden.

Für die folgenden Aufzeichnungen ist es nun zweckmäßig, eine Reihe von Abkürzungen einzuführen.

Für irgendwelche Operatorfunktionen $\phi_i(t \underline{x} \underline{c} s_i)$ wollen wir schreiben:

$$\begin{aligned} \phi_i(t \underline{x} \underline{c}_I s_{iI}) &= \phi_{iI} & \phi_i(t \underline{x} \underline{c}'_I s_{iI}) &= \phi'_{iI} \\ \phi_j(t \underline{x} \underline{c}_{II} s_{jII}) &= \phi_{jII} & \phi_j(t \underline{x} \underline{c}'_{II} s_{jII}) &= \phi'_{jII} \end{aligned}$$

Auch für die Streuamplitudenmatrizen 1.3 verwenden wir eine kompaktere Notation.

Abkürzungen:

$$a_{ij}(\underline{e} \underline{e}' \underline{s}_{iI} \underline{s}_{jII}) = a_{ij} \quad a_{ij}^+(\underline{e}' \underline{e} \underline{s}_{iI} \underline{s}_{jII}) = \left[a_{ij}(\underline{e} \underline{e}' \underline{s}_{iI} \underline{s}_{jII}) \right]^+ = a_{ij}^+$$

$$a_{ij}(\underline{e} \underline{e} \underline{s}_{iI} \underline{s}_{jII}) = a_{ij}(0) \quad a_{ij}^+(\underline{e} \underline{e} \underline{s}_{iI} \underline{s}_{jII}) = a_{ij}^+(0) \quad .$$

Ein Strich an einer Operatorfunktion bedeutet eine Vertauschung der gestrichenen und ungestrichenen Geschwindigkeiten $\underline{c}'_I$ und $\underline{c}_{II}$ mit $\underline{c}_I$ und $\underline{c}_{II}$. (Vertauschung von vor und nach dem Stoß).

Mit diesen Bemerkungen notieren wir uns das Schattentheorem, eine Folge der Unitarität der S-Matrix, in der Form 1.4

$$1.4 \quad \left(a_{ij} a_{ij}^+ g d^2 e' \right) = \left(a_{ij}^+ a_{ij}' g d^2 e' \right) = \frac{h}{i m_{ij}} \left(a_{ij}(0) - a_{ij}^+(0) \right) \quad .$$

Spurbildungen über Spinmatrizen mit Index I bzw. II deuten wir in der weiteren Abhandlung durch die Zeichen tr_I bzw. tr_{II} an. Selbstverständlich haben die Spins der beiden Stoßpartner nichts miteinander zu tun und sind daher vertauschbar.

3. Beschreibung des Gasgemisches, Mittelwerte

Den Zustand des Gemisches beschreiben wir durch hermitesche Verteilungsmatrizen

$$1.5 \quad f_i(\underline{t} \underline{x} \underline{c} \underline{s}_i) \quad ,$$

die durch Polynome, höchstens vom Grade $2S_i$, der Komponenten des Spinvektors $\underline{s}_i$ dargestellt werden. Die Normierung wurde dabei so gewählt, daß $\underline{c}$ -Integration von 1.5 und Spurbildung über die Spinmatrizen die lokale Teilchenkonzentration der Sorte i ergibt.

$$1.6 \quad n_i = n_i(\underline{t} \underline{x}) = \text{tr} \int f_i(\underline{t} \underline{x} \underline{c} \underline{s}_i) d^3 c$$

Mit $\rho_i = m_i n_i$ führen wir auch die Teilchenkonzentration und die Massendichte des gesamten Gemisches ein.

$$1.7 \quad n = \sum_{i=1}^K n_i \quad \rho = \sum_{i=1}^K \rho_i$$

Den lokalen Komponentenmittelwert irgendeines Operators $\psi_i(t, \underline{x}, \underline{c}, \underline{s}_i)$ pro Teilchen erhalten wir aus der v. Neumannschen Mittelwertformel

$$1.8 \quad \langle \psi \rangle_i = \text{tr} \int \psi_i \frac{f_i}{n_i} d^3c$$

Aus 1.6, 1.7 und 1.8 baut sich dann der entsprechende Mittelwert des Gemisches auf:

$$1.9 \quad \langle \psi \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^K n_i \langle \psi \rangle_i$$

4. Boltzmann-Gleichungen

Die zeitliche Veränderung der Verteilungsmatrizen wird durch die Boltzmann-Gleichungen 1.10 gegeben, wenn man die von L. Waldmann (1957) angegebene Gleichung auf nicht reagierende Gemische verallgemeinert.

$$1.10 \quad \mathcal{D}_i(f)_{\mathbf{I}} = \sum_{j=1}^K \text{tr}_{\mathbf{I}} \int d^3c_{\mathbf{I}} \left(\int a_{ij} f'_{\mathbf{I}} f'_{j\mathbf{I}} a_{ij}^+ g d^2e' - \frac{\hbar}{im_{ij}} \left(a_{ij}(0) f_{\mathbf{I}} f_{j\mathbf{I}} - f_{\mathbf{I}} f_{j\mathbf{I}} a_{ij}^+(0) \right) \right)$$

Der Operator des Strömungstermes schreibt sich mit dem Kommutator $[\dots]$:

$$\mathcal{D}_i(f)_{\mathbf{I}} = \frac{\partial}{\partial t} f_{i\mathbf{I}} + \underline{c}_{\mathbf{I}} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{x}} f_{i\mathbf{I}} + \frac{1}{i} \omega_{Hi} \left[\underline{h} \cdot \underline{S}_{i\mathbf{I}}, f_{i\mathbf{I}} \right]$$

Wir haben dabei angenommen, daß ein Teilchen der Sorte i ein zum Spin paralleles magnetisches Moment der Größe μ_i trägt, welches in einem äußeren Magnetfeld $\underline{H} = H \underline{h}$ eine Präzession mit der Frequenz

$$\omega_{Hi} = \frac{\mu_i H}{\hbar S_i}$$

um die Richtung $\underline{h}$ erfährt.

Die Bezeichnung der Geschwindigkeiten vor dem Stoß durch einen Strich ist ausreichend, wenn man bedenkt, daß durch die Indizes der Streuamplitudenmatrix die Teilchensorten der Stoßpartner festgelegt sind. Die gestrichenen Geschwindigkeiten sind dann gemäß 1.1 auszudrücken.

Es sei erwähnt, daß für $f_i^+(t_0) = f_i(t_0)$ aus 1.10 die Hermitizität der f_i für alle $t \geq t_0$ folgt.

§ 2 Erhaltungssätze

Die Transportgleichung für den momentanen lokalen Komponentenmittelwert einer Größe $\psi_i(\underline{c}, \underline{s}_i)$, die nicht explizit von $\underline{x}$ und t abhängt, erhalten wir aus 1.10, wenn wir von links mit $\psi_i(\underline{c}_I, \underline{s}_{iI})$ multiplizieren, über $\underline{c}_I$ integrieren und die Spur über alle Spinmatrizen mit Index I ausführen.

$$2.1 \quad \frac{\partial}{\partial t} n_i \langle \psi \rangle_i + \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot n_i \langle \underline{c} \psi \rangle_i + \frac{1}{i} \omega_{ii} \text{tr}_{\underline{x}} \left(\psi_{iI} \left[\underline{h} \cdot \underline{s}_{iI}, f_{iI} \right]_- d^3 \underline{c}_I \right) \\ = \sum_{j=1}^k \text{tr}_{\underline{x}} \text{tr}_{\underline{x}} \left(d^3 \underline{c}_I d^3 \underline{c}_I \psi_{iI} \left(\int a_{ij} f'_{iI} f'_{jI} a_{ij}^+ g d^2 e' - \frac{\hbar}{im_j} (a_{ij}(0) f_{iI} f_{jI} - f_{iI} f_{jI} a_{ij}^+(0)) \right) \right)$$

Für Größen ψ_{iI} , die nicht vom Spin abhängen, erhalten wir aus 2.1 unter Verwendung des Schattentheorems 1.4 die Transportgleichung in einer einfacheren Form:

$$2.2 \quad \frac{\partial}{\partial t} n_i \langle \psi \rangle_i + \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot n_i \langle \underline{c} \psi \rangle_i = \mathcal{F}_i(\psi)$$

$$2.3 \quad \mathcal{F}_i(\psi) = \sum_{j=1}^k \text{tr}_{\underline{x}} \text{tr}_{\underline{x}} \left(\int d^3 \underline{c}_I d^3 \underline{c}_I \psi_{iI} f'_{iI} f'_{jI} a_{ij}^+ a_{ij} g d^2 e' \right) \\ - \sum_{j=1}^k \text{tr}_{\underline{x}} \text{tr}_{\underline{x}} \left(\int d^3 \underline{c}_I d^3 \underline{c}_I \psi_{iI} f_{iI} f_{jI} a_{ij}^+ a_{ij}' g d^2 e' \right).$$

Vertauschen der gestrichenen und ungestrichenen Geschwindigkeiten im ersten Term der ψ_i - Produktion aus 2.3 liefert mit dem Liouvilletheorem 1.2 :

$$\mathcal{F}_i(\psi) = \sum_j \text{tr}_{\underline{x}} \text{tr}_{\underline{x}} \left(\int d^3 \underline{c}_I d^3 \underline{c}_I (\psi'_{iI} - \psi_{iI}) f_{iI} f_{jI} a_{ij}^+ a_{ij}' g d^2 e' \right).$$

Wenn ψ_i nicht von der Geschwindigkeit abhängt, wie $\psi_i = 1$, erkennen wir in 2.2 die Kontinuitätsgleichung für Teilchensorte i .

$$\frac{\partial}{\partial t} n_i + \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot n_i \langle \underline{c} \rangle_i = 0$$

Die Transportgleichung einer spinunabhängigen Größe für das Gemisch erhalten wir aus 2.2 durch Summation über alle Teilchensorten i . Mit der Definition 1.9, der Mittelwerte für das Gemisch, ergibt sich dann:

$$\frac{\partial}{\partial t} n \langle \psi \rangle + \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot n \langle \underline{c} \psi \rangle = \mathcal{F}(\psi)$$

$$2.4 \quad \mathcal{F}(\psi) = \sum_i \sum_j \text{tr}_{\underline{x}} \text{tr}_{\underline{x}} \left(\int d^3 \underline{c}_I d^3 \underline{c}_I (\psi'_{iI} - \psi_{iI}) f_{iI} f_{jI} a_{ij}^+ a_{ij}' g d^2 e' \right).$$

Benennen wir in der Hälfte von 2.4 die Integrationsvariablen und die Summationsindizes in der folgenden Weise um,

$$c_I, c_{II} \rightarrow c_{II}, c_I \quad s_{II}, s_{jII} \rightarrow s_{II}, s_{jI} \quad ij \rightarrow ji$$

und benützen neben der Invarianz von $d^3c_I d^3c_{II} d^2e'$ unter dieser Umbenennung die triviale Symmetrie der Steuamplitudenmatrix gegen Teilchenumbenennung

2.5

$$a_{ij}(\underline{e} \underline{e}' \underline{s}_{iI} \underline{s}_{jII}) = a_{ji}(\underline{-e} \underline{-e}' \underline{s}_{jII} \underline{s}_{iI}) ,$$

so erhalten wir aus 2.4

$$\mathcal{F}(\psi) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j t_{rI} t_{rII} \iiint d^3c_I d^3c_{II} (\psi'_{iI} + \psi'_{jII} - \psi_{iI} - \psi_{jII}) f_{iI} f_{jII} a_{ij}^+ a_{ij} g d^2e' .$$

Die Produktion $\mathcal{F}(\psi)$ verschwindet wenn

$$\psi'_{iI} + \psi'_{jII} = \psi_{iI} + \psi_{jII} ,$$

also für

$$2.6 \quad 1 \quad , \quad m_i \underline{c} \quad , \quad \frac{m_i}{2} c^2 \quad .$$

Mit 2.6 liefert 2.4 die Erhaltungsgleichungen für Teilchenzahl, Impuls und Energie.

Anmerkung: Man beachte in 2.5 die Sortenindizes!

Teil B

Allgemeine Betrachtungen der linearisierten Boltzmann-Gleichungen

§ 3 Lineare Stoßoperatoren

=====

Bei allen weiteren Überlegungen betrachten wir den Fall, wo das Gasgemisch als Ganzes sich nahezu im thermischen Gleichgewicht der Temperatur T_0 befindet. Wir setzen deshalb mit den ruhenden Maxwellverteilungen (k =Boltzmann-konstante)

$$3.1 \quad f_i^{(0)}(c^2) = \frac{1}{2S_i+1} n_i^{(0)} \left(\frac{m_i}{2\pi k T_0} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(- \frac{m_i}{2 k T_0} c^2 \right)$$

die Verteilungsoperatoren des Gemisches in der folgenden Form an:

$$3.2 \quad f_i = f_i^{(0)} (1 + \phi_i) \quad .$$

Die magnetischen Energien $\omega_{Hi} \hbar$ haben wir dabei gegenüber kT_0 vernachlässigt. Alle Gleichgewichtsmittelwerte der einzelnen Komponenten des Gemisches bezeichnen wir durch:

$$3.3 \quad \langle \psi \rangle_i^{(0)} = \text{tr} \int \psi_i \frac{f_i^{(0)}}{n_i^{(0)}} d^3c \quad .$$

Insbesondere sei $n_i^{(0)}$ die Gleichgewichtsteilchendichte der Sorte i . Daraus setzt sich analog zu 1.7 die Gesamtteilchendichte im Gleichgewicht zusammen.

$$n_0 = \sum_i n_i^{(0)}$$

Für spätere Anwendungen bemerken wir an Hand von 3.1 die Invarianz von

$$f_{iI}^{(0)} f_{jII}^{(0)} = f_i^{(0)}(c_I^2) f_j^{(0)}(c_{II}^2)$$

gegenüber einer Umbenennung $c_I \rightarrow c_{II} \rightarrow c_I$ gleichzeitig mit $ij \rightarrow ji$, sowie die Invarianz gegen $c_I \rightarrow -c_I$ und $c_{II} \rightarrow -c_{II}$. Der Energiesatz hat zur Folge:

$$3.4 \quad f_{iI}^{(0)} f_{jII}^{(0)} = f_{iI}^{(0)} f_{jII}^{(0)} \quad .$$

Beschränken wir unsere Untersuchungen auf kleine Abweichungen vom thermischen Gleichgewicht, so sind die linearen Boltzmann-Gleichungen 3.5 eine gute Näherung zur Beschreibung der Transportvorgänge im Gasgemisch.

$$3.5 \quad \mathcal{D}_i(\phi)_I + \sum_{j=1}^K \omega_{ij}^-(\phi)_I + \sum_{j=1}^K \omega_{ij}^+(\phi)_I = 0$$

Dabei sind die Stoßoperatoren linear in der Abweichung vom thermischen Gleichgewicht.

$$3.6 \quad \omega_{ij}^-(\phi)_I = -\text{tr}_I \int d\vec{c}_I \int_{jI}^{(6)} \left(a_{ij} \phi'_{iI} a_{ij}^+ g d^2 e' - \frac{\hbar}{im_{ij}} \left(a_{ij}(0) \phi_{iI} - \phi_{iI} a_{ij}^+(0) \right) \right)$$

$$3.7 \quad \omega_{ij}^+(\phi)_I = -\text{tr}_I \int d\vec{c}_I \int_{jI}^{(6)} \left(a_{ij} \phi'_{jI} a_{ij}^+ g d^2 e' - \frac{\hbar}{im_{ij}} \left(a_{ij}(0) \phi_{jI} - \phi_{jI} a_{ij}^+(0) \right) \right)$$

Aus diesen Definitionen ersehen wir sofort:

$$3.8 \quad \left(\omega_{ij}^-(\phi)_I \right)^+ = \omega_{ij}^-(\phi^+)_I$$

$$\left(\omega_{ij}^+(\phi)_I \right)^+ = \omega_{ij}^+(\phi^+)_I$$

Der Term $\omega_{ij}^-(\phi)_I$ ist im Wesentlichen der Stoßoperator des Lorentzgas. *

Für die späteren Anwendungen ist es nützlich, sogenannte zugeordnete Stoßoperatoren einzuführen. Sie ergeben sich aus 3.6 und 3.7 durch Vertauschen von a_{ij} , a_{ij}^+ mit a_{ij}^+ , a_{ij} , Vorzeichenumkehr der imaginären Einheit und Vertauschen von $a_{ij}(0)$, $a_{ij}^+(0)$ mit $a_{ij}^+(0)$, $a_{ij}(0)$.

$$3.9 \quad \tilde{\omega}_{ij}^-(\phi)_I = -\text{tr}_I \int d\vec{c}_I \int_{jI}^{(6)} \left(a_{ij}^+ \phi'_{iI} a_{ij} g d^2 e' + \frac{\hbar}{im_{ij}} \left(a_{ij}^+(0) \phi_{iI} - \phi_{iI} a_{ij}(0) \right) \right)$$

$$3.10 \quad \tilde{\omega}_{ij}^+(\phi)_I = -\text{tr}_I \int d\vec{c}_I \int_{jI}^{(6)} \left(a_{ij}^+ \phi'_{jI} a_{ij} g d^2 e' + \frac{\hbar}{im_{ij}} \left(a_{ij}^+(0) \phi_{jI} - \phi_{jI} a_{ij}(0) \right) \right)$$

Die Brauchbarkeit dieser Definitionen wird sich bei späteren Symmetriebetrachtungen zeigen.

Für klassische ϕ oder für Steuamplituden, die den Spin nicht enthalten, vereinfachen sich 3.6 und 3.7 zu:

$$3.11 \quad \omega_{ij}^-(\phi_{\text{klass}})_I = +\text{tr}_I \int d\vec{c}_I \int_{jI}^{(6)} \left(\phi_{iI} - \phi'_{iI} \right) a_{ij} a_{ij}^+ g d^2 e'$$

$$\omega_{ij}^+(\phi_{\text{klass}})_I = +\text{tr}_I \int d\vec{c}_I \int_{jI}^{(6)} \left(\phi_{jI} - \phi'_{jI} \right) a_{ij} a_{ij}^+ g d^2 e'$$

* (L. Waldmann (1960))

§ 4 Klammersymbole und deren Symmetrien

1. Stoßklammern

Bei einem später angewandten Verfahren zur näherungsweisen Lösung der linearisierten Boltzmann-Gleichungen wird 3.5 mit einem Operator ψ_{iI} von links multipliziert, die ganze Gleichung mit $\frac{1}{n_i^{(0)}} f_{iI}^{(0)}$ gewichtet, anschließend über c_I integriert und über die Spinmatrizen s_{iI} die Spur gebildet.

Wir wollen deshalb mit den Stoßtermen 3.6 und 3.7 folgende Stoßklammersymbole definieren und deren Symmetrien untersuchen:

$$\begin{aligned} 4.1 \quad \{ \psi \omega(\phi) \}_{ij}^{\top} &= \text{tr}_I \left(\frac{f_{iI}^{(0)}}{n_i^{(0)}} \psi_{iI} \omega_{ij}^{\top}(\phi)_I d^3 c_I \right) \\ 4.2 \quad \{ \psi \omega(\phi) \}_{ij}^{\top\top} &= \text{tr}_I \left(\frac{f_{iI}^{(0)}}{n_i^{(0)}} \psi_{iI} \omega_{ij}^{\top\top}(\phi)_I d^3 c_I \right) . \end{aligned}$$

Im Gegensatz zu den entsprechenden Symbolen, die von L. Waldmann zur Behandlung des einatomigen Gasgemisches eingeführt wurden (Handbuch Bd. XII S. 420) gilt:

$$\{ \dots \}_{ij}^{\top} \propto n_j^{(0)} \quad \{ \dots \}_{ij}^{\top\top} \propto n_j^{(0)} .$$

Die Summation der Stoßterme in 3.5 über die Teilchensorten j läßt sich dabei zerlegen:

$$4.3 \quad \sum_j \left(\{ \dots \}_{ij}^{\top} + \{ \dots \}_{ij}^{\top\top} \right) = \sum_{j \neq i} \{ \dots \}_{ij}^{\top} + \sum_{j \neq i} \{ \dots \}_{ij}^{\top\top} + \{ \dots \}_{ii}^{\top} + \{ \dots \}_{ii}^{\top\top} .$$

Die beiden letzten Terme zusammen sind nichts anderes als die bekannte Stoßklammer eines reinen Gases, bestehend nur aus Teilchen der Sorte i .

$$\{ \psi \omega(\phi) \}_i = \{ \psi \omega(\phi) \}_{ii}^{\top} + \{ \psi \omega(\phi) \}_{ii}^{\top\top} = \langle \psi \omega(\phi) \rangle_{\text{Hess, Waldmann}}$$

Alle Eigenschaften von $\{ \psi \omega(\phi) \}_i$ sind in der Arbeit von Hess und Waldmann (1966) bewiesen.

Schließlich definieren wir noch Gesamtstoßklammern

$$4.4 \quad \{ \psi \omega(\phi) \}_{ij} = \begin{cases} \sum_{j \neq i} \{ \psi \omega(\phi) \}_{ij}^{\top} + \{ \psi \omega(\phi) \}_i & i = j \\ \{ \psi \omega(\phi) \}_{ij}^{\top\top} & i \neq j \end{cases} ,$$

so daß sich damit die Stoßklammersumme 4.3 schreibt:

$$4.5 \quad \sum_j \left(\{ \psi \omega(\phi) \}_{ij}^{\top} + \{ \psi \omega(\phi) \}_{ij}^{\top\top} \right) = \sum_j \{ \psi \omega(\phi) \}_{ij} \quad .$$

Alle Ausdrücke sind durch die aus 3.9 und 3.10 in analoger Weis gebildeten zugeordneten Stoßklammersymbole $\{ \psi \tilde{\omega}(\phi) \}_{ij}^{\top}$, $\{ \psi \tilde{\omega}(\phi) \}_{ij}^{\top\top}$, $\{ \psi \tilde{\omega}(\phi) \}_{ij}$ zu ergänzen. Es ist klar, daß alle Ausdrücke 4.1-4.5 für hermitesche ψ und ϕ wegen 3.8 reell sind.

a) Positive Semi-Definitheit der Stoßklammern

Analog zu den Ausführungen bei Waldmann(1960) und Hess u.Waldmann(1966) läßt sich zeigen

$$4.6 \quad \{ \psi \omega(\psi) \}_{ij}^{\top} \geq 0$$

$$\sum_j \sum_i n_i^{(0)} \left(\{ \psi \omega(\psi) \}_{ij}^{\top} + \{ \psi \omega(\psi) \}_{ij}^{\top\top} \right) \geq 0$$

und damit wegen $\{ \psi \omega(\psi) \}_i \geq 0$ und 4.5

$$4.6 a \quad \boxed{ \{ \psi \omega(\psi) \}_{ii} \geq 0 } \quad (\text{Wird wichtig auf Seite 41})$$

$$4.7 \quad \boxed{ \sum_j \sum_i n_i^{(0)} \{ \psi \omega(\psi) \}_{ij} \geq 0 }$$

Das Gleichheitszeichen der Relation 4.6 wird angenommen, wenn

$$\psi_{iI} a_{ij} = a_{ij} \psi'_{iI}$$

also wenn ψ sowohl von Spin und Geschwindigkeit unabhängig ist. Die Beziehung 4.7 garantiert die Zunahme der Entropie. Das Gleichheitszeichen gilt dann, wenn

$$(\psi_{iI} + \psi_{jI}) a_{ij} = a_{ij} (\psi'_{iI} + \psi'_{jI}) \quad .$$

Also für die Stoßinvarianten 2.6 .

b) Vertauschungseigenschaften

Durch Anschreiben der Stoßklammern $\{ \phi \tilde{\omega}(\psi) \}_{ij}^{\top}$ und $n_j^{(0)} \{ \phi \tilde{\omega}(\psi) \}_{ji}^{\top\top}$ erkennt man nach geeigneter zyklischer Vertauschung unter der Spur, Anwendung von 2.5 (Nur beim Beweis von 4.9)

geeigneter Vertauschung von gestrichenen und ungestrichenen Geschwindigkeiten, Benützung von 3.4 und Anwendung des Liouville theorems, die Vertauschungseigenschaften der Stoßklammern

$$4.8 \quad \{ \phi \tilde{\omega}(\psi) \}_{ij}^{\sim} = \{ \psi \omega(\phi) \}_{ij}^{\sim} \quad (\text{Wird wichtig beim Beweis von 4.13.})$$

$$4.9 \quad n_j^{(4)} \{ \phi \tilde{\omega}(\psi) \}_{ji}^{\sim} = n_i^{(4)} \{ \psi \omega(\phi) \}_{ij}^{\sim} \quad (\text{Man beachte Sortenindizes!})$$

oder zusammengefaßt

$$\boxed{n_j^{(4)} \{ \phi \tilde{\omega}(\psi) \}_{ji}^{\sim} = n_i^{(4)} \{ \psi \omega(\phi) \}_{ij}^{\sim}} \quad .$$

c) Parität

Setzen wir die Paritätsinvarianz 4.10 der Streuamplitudenoperatoren voraus

$$4.10 \quad \boxed{a_{ij}(\underline{e} \underline{e}' \underline{s}_{iI} \underline{s}_{jII}) = a_{ij}(\underline{-e} \underline{-e}' \underline{s}_{iI} \underline{s}_{jII})}$$

so führen mit

$$\psi_P(\underline{e} \underline{s}) = \psi(\underline{-e} \underline{s})$$

die gleichen Manipulationen, wie bei Hesse u. Waldmann (1966) ausgeführt, auf die wichtigen Beziehungen

$$\{ \psi \omega(\phi) \}_{ij}^{\sim} = \{ \psi_P \omega(\phi_P) \}_{ij}^{\sim} \quad \{ \psi \omega(\phi) \}_{ij}^{\sim\sim} = \{ \psi_P \omega(\phi_P) \}_{ij}^{\sim\sim}$$

und damit zu

$$\{ \psi \omega(\phi) \}_{ij} = \{ \psi_P \omega(\phi_P) \}_{ij} \quad .$$

Für $\psi_P = P_\psi \psi$, $\phi_P = P_\phi \phi$ mit $P_\psi = \pm 1$, $P_\phi = \pm 1$ gilt

$$4.11 \quad \boxed{\{ \psi \omega(\phi) \}_{ij} = P_\psi P_\phi \{ \psi \omega(\phi) \}_{ij}} \quad .$$

Das heißt, daß die Stoßklammern 4.11 verschwinden, wenn ψ und ϕ verschiedene Parität haben.

d) Zeitumkehr

Die analogen Symmetrien zur Zeitumkehroperation

$$\psi_T(\underline{c} \ \underline{s}) = \psi(-\underline{c} \ -\underline{s})$$

finden wir im Falle des nichtreagierenden Gasgemisches wieder in

$$\{\psi\omega(\phi)\}_{ij}^{\gamma} = \{\phi_T\omega(\psi_T)\}_{ij}^{\gamma} \qquad n_i^{(o)}\{\psi\omega(\phi)\}_{ij}^{\gamma\gamma} = n_j^{(o)}\{\phi_T\omega(\psi_T)\}_{ji}^{\gamma\gamma}$$

(Man beachte Sortenindizes!)

und somit

$$4.12 \qquad n_i^{(o)}\{\psi\omega(\phi)\}_{ij} = n_j^{(o)}\{\phi_T\omega(\psi_T)\}_{ji} \quad .$$

Bei den Beweisen gehen wesentlich die Zeitumkehrinvarianz der Streuamplituden

$$a_{ij}(\underline{e} \ \underline{e}' \ \underline{s}_{iI} \ \underline{s}_{jII}) = a_{ij}(-\underline{e}' \ -\underline{e} \ -\underline{s}_{iI} \ -\underline{s}_{jII})$$

und die Vertauschungseigenschaften der Stoßklammern 4.8 und 4.9 ein.

Für $\psi_T = T_\psi \psi$, $\phi_T = T_\phi \phi$ mit $T_\psi = \pm 1$, $T_\phi = \pm 1$ gibt 4.12 die Onsagersymmetrie der später eingeführten Transportkoeffizienten

4.13

$$n_i^{(o)}\{\psi\omega(\phi)\}_{ij} = T_\psi T_\phi n_j^{(o)}\{\phi\omega(\psi)\}_{ji} \quad \cdot \quad \text{(Man beachte Sortenindizes!)}$$

e) Isotropie

Ohne Magnetfeld sind die Stoßoperatoren exakt isotrop. Da wir den Einfluß des äußeren Magnetfeldes auf den Stoßvorgang unberücksichtigt gelassen haben, können nur solche ψ und ϕ mit gleicher Tensorstufe nichtverschwindende Stoßklammern liefern.

d) Stoßklammern von Erhaltungsgrößen

Wenn bei der Bildung von Stoßklammern gemäß Definition 4.1 und 4.2 entweder als ψ oder als ϕ eine Erhaltungsgröße beteiligt ist, das heißt

$$\psi_{iI} + \psi_{jII} = \psi'_{iI} + \psi'_{jII} \quad \text{oder} \quad \phi_{iI} + \phi_{jII} = \phi'_{iI} + \phi'_{jII} \ ,$$

so lassen sich leicht einfache Beziehungen zwischen 4.1 und 4.2 herstellen.
Aus 3.11 erkennen wir sofort

$$4.14 \quad \{\psi\omega(\phi_{\text{Erh.}})\}_{ij}^{\top} + \{\psi\omega(\phi_{\text{Erh.}})\}_{ij}^{\top\top} = 0$$

Insbesondere ersieht man an 3.11

$$4.15 \quad \{\psi\omega(1)\}_{ij}^{\top} = \{\psi\omega(1)\}_{ij}^{\top\top} = 0$$

Zusammen mit 4.5 ergibt sich dann aus 4.14 durch Summation über j

$$4.16 \quad \boxed{\sum_{j=1}^K \{\psi\omega(\phi_{\text{Erh.}})\}_{ij} = 0} \quad (\text{Wird wichtig auf Seite 36})$$

und aus 4.15

$$\boxed{\{\psi\omega(1)\}_{ij} = 0}$$

Durch Anschreiben verifiziert man leicht

$$4.17 \quad n_i^{(o)} \{\psi_{\text{Erh.}} \omega(\phi)\}_{ij}^{\top} + n_j^{(o)} \{\psi_{\text{Erh.}} \omega(\phi)\}_{ji}^{\top\top} = 0$$

Insbesondere zeigt man beim Beweis von 4.17

$$\{\psi\omega(\phi)\}_{ij}^{\top} = \{\psi\omega(\phi)\}_{ij}^{\top\top} = 0 \quad (\text{Sortenindizes!})$$

und damit

$$\boxed{\{\psi\omega(\phi)\}_{ij} = 0}$$

Addiert man zu 4.17 noch $n_i^{(o)} \{\psi_{\text{Erh.}} \omega(\phi)\}_i = 0$ (Stoßklammer eines reinen Gases) und summiert über alle $j \neq i$, so erhalten wir schließlich mit der Definition 4.4 $\sum_{j=1}^K n_j^{(o)} \{\psi_{\text{Erh.}} \omega(\phi)\}_{ji} = 0$ oder :

$$4.18 \quad \boxed{\sum_{i=1}^K n_i^{(o)} \{\psi_{\text{Erh.}} \omega(\phi)\}_{ij} = 0} \quad (\text{Wird wichtig auf Seite 30})$$

Die Beziehung 4.18 liefert später aus den Transport-Relaxationsgleichungen die Erhaltungssätze.

2. Die $\underline{c}$ - Klammern

Es sei

$$4.19 \quad \langle \psi \subseteq \phi \rangle_i^{(a)} = \text{tr} \left(\frac{f_i^{(a)}}{n_i^{(a)}} \subseteq \psi_i \phi_i d^3 c \right).$$

Wir erkennen sofort die Symmetrien

$$\langle \psi \subseteq \phi \rangle_i^{(a)} = \langle \phi \subseteq \psi \rangle_i^{(a)} = - \langle \psi_p \subseteq \phi_p \rangle_i^{(a)} = - \langle \psi_T \subseteq \phi_T \rangle_i^{(a)}$$

und damit für

$$4.21 \quad \psi_P = \pm \psi, \quad \psi_T = \pm \psi, \quad \phi_P = \pm \phi, \quad \phi_T = \pm \phi$$

das Verschwinden wenn ψ und ϕ gleiche Parität oder gleiches Zeitumkehrverhalten zeigen.

3. Die $\underline{s}$ - Klammern

$$4.22 \quad \frac{4}{i} \langle \psi [\underline{s}, \phi]_- \rangle_i^{(a)} = \frac{4}{i} \text{tr} \left(\frac{f_i^{(a)}}{n_i^{(a)}} \psi_i (\underline{s}_i \phi_i - \phi_i \underline{s}_i) d^3 c \right)$$

Die $\underline{s}$ - Klammern geben nur einen Beitrag, wenn beide Größen ψ und ϕ den Spin enthalten. Sie sind antisymmetrisch

$$4.23 \quad \langle \psi [\underline{s}, \phi]_- \rangle_i^{(a)} = - \langle \phi [\underline{s}, \psi]_- \rangle_i^{(a)} = \langle \psi_p [\underline{s}, \phi_p]_- \rangle_i^{(a)} = \langle \psi_T [\underline{s}, \phi_T]_- \rangle_i^{(a)}$$

und verschwinden sowohl bei verschiedenem P - Verhalten als auch bei verschiedenem T - Verhalten von ψ und ϕ wenn wieder 4.21 gilt.

Teil C

Lösungstheorie der linearisierten Boltzmann Gleichungen

§ 5 Das Momentenverfahren zur Lösung der Boltzmann-Gleichungen

1. Entwicklung der Verteilungsoperatoren

Den Arbeiten von Waldmann (1960), (1963), Hess u. Waldmann (1966) folgend, entwickeln wir nun mit dem Ansatz 5.1 die Abweichung vom thermischen Gleichgewicht nach einem vollständigen Orthogonalsystem von irreduziblen Entwicklungstensoren in Geschwindigkeit und Spin:

$$5.1 \quad \phi_i(t, \underline{x} \in \underline{S}_i) = \sum_{P=1}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k'=1}^{\infty} \phi_{i, \mu_i' \dots \mu_{\ell}'}^{(P, R')} (\underline{c} \in \underline{S}_i) a_{i, \mu_i' \dots \mu_{\ell}'}^{(P, R')} (t, \underline{x}) .$$

Entwicklungstensoren der gleichen Tensorstufe l' und gleicher Parität $P' = \pm 1$ werden später bei der Wahl eines speziellen Entwicklungssystems mit hochgestellten eingeklammerten Ziffern $k' = 1, 2, 3, \dots$ durchnummeriert. Die Ort- und Zeitabhängigkeit stecken wir in die zu bestimmenden Entwicklungskoeffizienten $a_{i, \mu_i' \dots \mu_{\ell}'}^{(P, k')} (t, \underline{x})$. Diese sind bei konsequenter Linearisierung die Komponentenmittelwerte der entsprechenden Entwicklungstensoren, wenn wir folgende Ortho-normierungsbedingung an unser Entwicklungssystem stellen:

$$5.2 \quad \langle \phi_{\mu_i' \dots \mu_{\ell}'}^{(P, R)} \phi_{\mu_i' \dots \mu_{\ell}'}^{(P', R')} \rangle_i^{(q)} = \delta_{\ell \ell'} \delta^{(P, P')} \delta^{(R, R')} \Delta_{\mu_i' \dots \mu_{\ell}'}^{(q)} .$$

Die Symbole $\delta_{ll'}$, $\delta^{(kk')}$, $\delta^{(PP')}$ verwenden wir für Kronecker's Delta. Nach Einsetzen von 5.1 in 3.2, anschließende Multiplikation mit $\phi_{i, \mu_i' \dots \mu_{\ell}'}^{(P, k)}$, Integration über $\underline{c}$ und Spurbildung über die Spinmatrizen erhalten wir nämlich für $\phi_{i, \dots}^{(P, k)} \neq 1$

$$n_i \langle \phi_{\mu_i' \dots \mu_{\ell}'}^{(P, R)} \rangle_i = n_i^{(q)} a_{i, \mu_i' \dots \mu_{\ell}'}^{(P, R)} (t, \underline{x})$$

und damit bei konsequenter Linearisierung, die durch die ganze Arbeit hindurch von nun an immer vorgenommen wird:

$$5.3 \quad \langle \phi_{\mu_i' \dots \mu_{\ell}'}^{(P, R)} \rangle_i = a_{i, \mu_i' \dots \mu_{\ell}'}^{(P, R)} (t, \underline{x}) .$$

Der erste Vertreter der isotropen Tensoren $\Delta_{\mu_1 \dots \mu_\ell, \mu'_1 \dots \mu'_\ell}^{(1)}$ ist der bekannte 3-dim. isotrope Tensor 2. Stufe $\delta_{\mu\mu'}$. Alle höheren bauen sich darauf auf. Wichtig sind nicht die expliziten Ausdrücke, sondern zunächst nur die Reduktionsformel, (Hess'sche Formelsammlung 1967)

$$5.4 \quad \Delta_{\mu_1 \dots \mu_\ell, \mu'_1 \dots \mu'_\ell}^{(\ell)} = 2\ell + 1$$

die Symmetrie gegen Vertauschen des Satzes der ungestrichenen Indizes mit dem Satz der gestrichenen Indizes und die totale Irreduzibilität sowohl innerhalb des Satzes der ungestrichenen als auch innerhalb des Satzes der gestrichenen Indizes. Aus einem allgemeinen Tensor $a_{\mu_1 \dots \mu_\ell}^{(1)} \dots a_{\mu'_1 \dots \mu'_\ell}^{(1)}$ projiziert $\Delta_{\dots}^{(1)}$ den irreduziblen Anteil heraus

$$5.5 \quad \Delta_{\mu_1 \dots \mu_\ell, \mu'_1 \dots \mu'_\ell}^{(\ell)} a_{\mu_1' \dots \mu_\ell'}^{(\ell)} = \overline{a_{\mu_1 \dots \mu_\ell, \mu'_1 \dots \mu'_\ell}^{(\ell)}} \quad .$$

2. Das allgemeine System der Transportrelaxationsgleichungen (T.R.G.'en)

Nach dem Momentenverfahren ersetzen wir nun in den linearen Boltzmann-Gleichungen 3.5 die ϕ_i durch 5.1. Multiplikation mit $\frac{1}{n_i^{(0)}} \phi_{i, \mu_1 \dots \mu_\ell}^{(p_k)}$ liefert nach $\underline{c}$ -Integration und Spurbildung über die Spinmatrizen das gekoppelte lineare Differentialgleichungssystem der Entwicklungskoeffizienten.

a) Der $\frac{\partial}{\partial t}$ - Term

Vermöge der Orthonormierung 5.2 und der Eigenschaft 5.5 erhalten wir aus der linearen Boltzmann-Gleichungen 3.5 die Ausdrücke:

$$\frac{\partial}{\partial t} a_{i, \mu_1 \dots \mu_\ell}^{(p_k)}(t \times)$$

b) Der $c_{\lambda} \frac{\partial}{\partial x_\lambda}$ - Term

Aus dem Störungsterm entstehen die in 4.19 definierten $\underline{c}$ - Klammern. Für ein spezielles Orthonormalsystem lassen sich $\underline{c}$ - Klammern auf reduzierte Matrixelemente $(Plk|c|P'l'k')_i$ und geeignete isotrope Tensoren zurückführen. Aus Isotropiegründen und Paritätsgründen sind $\underline{c}$ - Klammern nur dann von Null verschieden, wenn sie aus Entwicklungstensoren gebildet werden, deren Tensorstufen sich um $\Delta l = \pm 1, 0$ unterscheiden und verschiedene Parität haben.

$$5.6 \quad \Delta \ell = -1 \quad \langle \Phi_{\mu_1 \dots \mu_\ell}^{(\mathcal{P}\mathcal{K})} C_\lambda \Phi_{\mu'_1 \dots \mu'_{\ell-1}}^{(-\mathcal{P}\mathcal{K}')} \rangle_i^{(e)} = (\mathcal{P}\mathcal{E}\mathcal{K}|c|-\mathcal{P}(\ell-1)\mathcal{K}')_i \Delta_{\mu_1 \dots \mu_\ell, \mu'_1 \dots \mu'_{\ell-1}, \lambda}^{(e)}$$

$$5.7 \quad \Delta \ell = 0 \quad \langle \Phi_{\mu_1 \dots \mu_\ell}^{(\mathcal{P}\mathcal{K})} C_\lambda \Phi_{\mu'_1 \dots \mu'_\ell}^{(-\mathcal{P}\mathcal{K}')} \rangle_i^{(e)} = (\mathcal{P}\mathcal{E}\mathcal{K}|c|-\mathcal{P}\mathcal{E}\mathcal{K}')_i \square_{\mu_1 \dots \mu_\ell, \lambda, \mu'_1 \dots \mu'_\ell}^{(e)}$$

$$\Delta \ell = +1 \quad \langle \Phi_{\mu_1 \dots \mu_\ell}^{(\mathcal{P}\mathcal{K})} C_\lambda \Phi_{\mu'_1 \dots \mu'_{\ell+1}}^{(-\mathcal{P}\mathcal{K}')} \rangle_i^{(e)} = (\mathcal{P}\mathcal{E}\mathcal{K}|c|-\mathcal{P}(\ell+1)\mathcal{K}')_i \Delta_{\mu_1 \dots \mu_\ell, \lambda, \mu'_1 \dots \mu'_{\ell+1}}^{(e+1)}$$

Die isotropen Tensoren $\square_{\mu_1 \dots \mu_\ell, \lambda, \mu'_1 \dots \mu'_\ell}^{(e)}$ sind mit der Definition

$$\square_{\mu_1 \dots \mu_\ell, \lambda, \mu'_1 \dots \mu'_\ell}^{(e)} = \Delta_{\mu_1 \dots \mu_\ell, \nu_1 \dots \nu_{\ell-1}}^{(e)} \mathcal{E}_{\mathcal{E}\lambda \times} \Delta_{\nu_1 \dots \nu_{\ell-1}, \mu'_1 \dots \mu'_\ell}^{(e)}$$

auf die Δ zurückgeführt. Daraus erkennt man sofort die Antisymmetrie

$$5.8 \quad \square_{\mu_1 \dots \mu_\ell, \lambda, \mu'_1 \dots \mu'_\ell}^{(e)} = - \square_{\mu'_1 \dots \mu'_\ell, \lambda, \mu_1 \dots \mu_\ell}^{(e)}$$

Auch von diesen benötigen wir zunächst nur die allgemeine Eigenschaft

$$5.9 \quad \mathcal{E}_{\mu_\ell \lambda \mu'_\ell} \square_{\mu_1 \dots \mu_{\ell-1}, \mu_\ell, \lambda, \mu'_1 \dots \mu'_{\ell-1}, \mu'_\ell}^{(e)} = \frac{(\ell+1)(2\ell+1)}{\ell}$$

Zusammen mit 5.4 liefert 5.9 sofort die Auflösung von 5.6 und 5.7 nach den reduzierten Matrixelementen.

$$(\mathcal{P}\mathcal{E}\mathcal{K}|c|-\mathcal{P}(\ell-1)\mathcal{K}')_i = \frac{1}{2\ell+1} \langle \Phi_{\mu_1 \dots \mu_{\ell-1}, \lambda}^{(\mathcal{P}\mathcal{K})} C_\lambda \Phi_{\mu_1 \dots \mu_{\ell-1}}^{(-\mathcal{P}\mathcal{K}')} \rangle_i^{(e)}$$

$$(\mathcal{P}\mathcal{E}\mathcal{K}|c|-\mathcal{P}\mathcal{E}\mathcal{K}')_i = \frac{\ell}{(\ell+1)(2\ell+1)} \langle \Phi_{\mu_1 \dots \mu_{\ell-1}, \mu_\ell}^{(\mathcal{P}\mathcal{K})} C_\lambda \Phi_{\mu_1 \dots \mu_{\ell-1}, \mu'_\ell}^{(-\mathcal{P}\mathcal{K}')} \rangle_i^{(e)} \mathcal{E}_{\mu_\ell \lambda \mu'_\ell}$$

Die Anzahl der bei einem speziellen Entwicklungssystem zu berechnenden Matrixelementen reduziert sich durch die Symmetrie 4.20, bei Beachtung von

$$\Delta_{\mu_1 \dots \mu_\ell, \mu'_1 \dots \mu'_\ell}^{(e)} = \Delta_{\mu'_1 \dots \mu'_\ell, \mu_1 \dots \mu_\ell}^{(e)}$$

und 5.8 wesentlich:

$$(\mathcal{P}\mathcal{E}\mathcal{K}|c|-\mathcal{P}(\ell-1)\mathcal{K}')_i = (-\mathcal{P}(\ell-1)\mathcal{K}'|c|\mathcal{P}\mathcal{E}\mathcal{K})_i$$

$$(\mathcal{P}\mathcal{E}\mathcal{K}|c|-\mathcal{P}\mathcal{E}\mathcal{K}')_i = -(-\mathcal{P}\mathcal{E}\mathcal{K}'|c|\mathcal{P}\mathcal{E}\mathcal{K})_i$$

Die i -Abhängigkeit der reduzierten Matrixelemente $(\mathcal{P}\mathcal{K}|c|\mathcal{P}'\mathcal{K}')$ übersieht man leicht, wenn man c durch eine dimensionslose Geschwindigkeit $c_i = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{c_i} \frac{\hbar}{m_i}$ mit $c_i^{(0)} = \sqrt{\frac{3kT}{m_i}}$ ausdrückt.

$$(\dots |c| \dots)_i = \sqrt{\frac{2}{3}} c_i^{(0)} \langle \dots |V| \dots \rangle_{\text{Hess, Waldmann}}$$

c) Spin - Präzessionsterm

Im homogenen Magnetfeld enthält die linke Seite der Boltzmann-Gleichungen 3.5 einen Kommutator, der zu den in § 4 eingeführten $\underline{s}$ -Klammern führt. Analog den $\underline{c}$ -Matrixelementen lassen sich auch diese auf Zahlenfaktoren $(Plk|s|Pl'k')$ und isotrope Tensoren $\Delta^{(e)}$ bzw. $\square^{(e)}$ zurückführen. Im Gegensatz zu den reduzierten $\underline{c}$ -Klammern sind diese bei einer Orthonormierung 5.2 unabhängig von der Teilchensorte. Ebenfalls aus Isotropie- und Paritätsgründen liefern nur solche $\underline{s}$ -Klammern nichtverschwindende Beiträge, deren Parität gleich ist und deren Tensorstufen sich um $\Delta l = \pm 1, 0$ unterscheiden.

$$\frac{1}{i} \langle \Phi_{\mu_1 \dots \mu_{\ell}}^{(PK)} [S_{\lambda} \Phi_{\mu'_1 \dots \mu'_{\ell-1}}^{(PK')}] \rangle_i^{(0)} = (PKR|S|P(\ell-1)R') \Delta_{\mu_1 \dots \mu_{\ell}, \mu'_1 \dots \mu'_{\ell-1}, \lambda}^{(e)}$$

$$\frac{1}{i} \langle \Phi_{\mu_1 \dots \mu_{\ell}}^{(PK)} [S_{\lambda} \Phi_{\mu'_1 \dots \mu'_\ell}^{(PK')}] \rangle_i^{(0)} = (PKR|S|PKR') \square_{\mu_1 \dots \mu_{\ell}, \lambda, \mu'_1 \dots \mu'_\ell}^{(e)}$$

$$\frac{1}{i} \langle \Phi_{\mu_1 \dots \mu_{\ell}}^{(PK)} [S_{\lambda} \Phi_{\mu'_1 \dots \mu'_{\ell+1}}^{(PK')}] \rangle_i^{(0)} = (PKR|S|P(\ell+1)R') \Delta_{\mu_1 \dots \mu_{\ell}, \lambda, \mu'_1 \dots \mu'_{\ell+1}}^{(e+1)}$$

Mit 5.4 und 5.9 können wir wiederum diese Gleichungen nach den Zahlenfaktoren auflösen.

$$(PKR|S|P(\ell-1)R') = \frac{1}{2\ell+1} \frac{1}{i} \langle \Phi_{\mu_1 \dots \mu_{\ell+1}, \lambda}^{(PK)} [S_{\lambda} \Phi_{\mu_1 \dots \mu_{\ell-1}}^{(PK')}] \rangle_i^{(0)}$$

$$(PKR|S|PKR') = \frac{\ell}{(\ell+1)(2\ell+1)} \frac{1}{i} \langle \Phi_{\mu_1 \dots \mu_{\ell+1}, \mu_{\ell}}^{(PK)} [S_{\lambda} \Phi_{\mu_1 \dots \mu_{\ell-1}, \mu_{\ell}}^{(PK')}] \rangle_i^{(0)} \varepsilon_{\mu_{\ell}, \lambda, \mu_{\ell}}$$

Bei einer speziellen Berechnung verwendet man natürlich die Symmetriebeziehung 4.23, die mit 5.8 und $\Delta_{\mu_{\ell}, \mu_{\ell}, \mu_{\ell}}^{(1)} = \Lambda_{\mu_{\ell}, \mu_{\ell}, \mu_{\ell}}^{(1)}$ auf die folgenden Identitäten führt:

$$(PKR|S|P(\ell-1)R') = -(P(\ell-1)R'|S|PKR)$$

$$(PKR|S|PKR') = (PKR'|S|PKR)$$

Wir erwähnen, daß sowohl beim Anschreiben der nichtverschwindenden $\underline{c}$ -Matrixelemente als auch $\underline{s}$ -Matrixelemente im allgemeinen System der T.R.G.'en noch keine Eigenschaft der Entwicklungstensoren bei Zeitumkehr ausgenutzt wurde.

d) Stoßterm

Der lineare Stoßterm unserer Boltzmann-Gleichungen führt auf die in § 4 eingeführten Stoßklammern. Wir wollen auch sie durch Skalare $\omega_{ij}^{(kk')\gamma}$, $\omega_{ij}^{(kk')\gamma\gamma}$ bzw. $\omega_{ij}^{(kk')}$, die sogenannten ω -Matrixelemente und die isotropen Tensoren darstellen. Wegen 4.11 verschwinden alle ω -Matrixelemente für Entwicklungstensoren verschiedener Parität. Wie schon in § 4 erwähnt, brauchen wir wegen der Drehinvarianz nur Matrixelemente von Entwicklungstensoren gleicher Tensorstufe aufzuschreiben.

$$\left\{ \phi_{\mu_1 \dots \mu_\ell}^{(p\ell)} \omega_{\mu_1 \dots \mu_\ell}^{(p\ell')} \right\}_{ij}^{\gamma} = \delta_{\ell\ell'} \delta^{(pp')} \omega_{ij}^{(kk')\gamma} \Delta_{\mu_1 \dots \mu_\ell, \mu'_1 \dots \mu'_\ell}$$

$$\omega_{ij}^{(kk')\gamma} = \frac{1}{2\ell+1} \left\{ \phi_{\mu_1 \dots \mu_\ell}^{(p\ell)} \omega_{\mu_1 \dots \mu_\ell}^{(p\ell')} \right\}_{ij}^{\gamma}$$

Sie sind durch die analogen Größen mit $\gamma\gamma$ zu ergänzen. Gemäß 4.4 können wir wieder zusammenfassend schreiben:

$$5.10 \quad \omega_{ij}^{(kk')} = \begin{cases} \sum_{j' \neq i} \omega_{ij'}^{(kk')\gamma} + \omega_i^{(kk')} & i = j \\ \omega_{ij}^{(kk')\gamma\gamma} & i \neq j \end{cases}$$

An geeigneten Stellen werden dabei alle bei Hess u. Waldmann (1966) bewiesenen Eigenschaften der ω -Matrixelemente $\omega_{ij}^{(kk')}$ eines reinen Gases, welches nur aus Teilchen der Sorte i besteht, benützt.

Mit diesen Bemerkungen notieren wir uns das allgemeine System der T.R.G.'en für ein K-Komponentiges Gasgemisch.

5.11

Das allgemeine System der Transportrelaxationsgleichungen

$$\frac{\partial}{\partial t} a_{i, \mu_1, \dots, \mu_e}^{(p, k)}$$

$$+ \sum_{k'} \left[(p, e, k | c | p, (k-1), k') \frac{\partial}{\partial x_{\mu_e}} a_{i, \mu_1, \dots, \mu_{e-1}}^{(p, k')} + (p, e, k | c | p, (k+1), k') \frac{\partial}{\partial x_{\mu_1}} a_{i, \mu_2, \dots, \mu_e}^{(p, k')} \right]$$

$$+ \sum_{k'} \omega_{h_i} \left[(p, e, k | s | p, (k-1), k') h_{\mu_e} a_{i, \mu_1, \dots, \mu_{e-1}}^{(p, k')} + (p, e, k | s | p, (k+1), k') h_{\mu_1} a_{i, \mu_2, \dots, \mu_e}^{(p, k')} \right]$$

$$+ \sum_{k'} \omega_{ij}^{(k, k')} a_{i, \mu_1, \dots, \mu_e}^{(p, k')} = 0$$

§ 6 Das verstümmelte System der Transportrelaxationsgleichungen

für ein spezielles Entwicklungssystem

1. Das spezielle Orthonormalsystem

Nach der allgemeinen Beschreibung der Lösungstheorie wollen wir nun ein spezielles Entwicklungssystem angeben. Wir wählen als irreduzible Entwicklungstensoren die den Gasgemisch analogen Kombinationen wie bei Hess und Waldmann (1966) (Seite 1539). An die Stelle von $\underline{c}$ tritt in unserem Fall die dimensionslose Variable $\underline{C}_i$, die von der Teilchensorte abhängt.

$$\underline{C}_i = \sqrt{\frac{m_i}{2kT_0}} \underline{c}$$

Durch den Sortenindex i ist $\underline{C}_i$ mit dem in der kinetischen Theorie der Gasgemische üblichen Symbol $\underline{C}$, der "Eigengeschwindigkeit" der Moleküle nicht zu verwechseln. Den irreduziblen Tensoren im Spinraum liegen selbstverständlich die kartesischen Komponenten des Spinvektors $\underline{s}_i$ vom Betrage S_i zugrunde. Neben der Tensorstufe l und der Parität P interessiert für die später gebrauchten Onsagersymmetrien 4.13 der Stoßklammern auch das Verhalten der Entwicklungstensoren bei Zeitumkehr. Wir deuten dies in der T - Spalte an.

Das Entwicklungsschema der Tabelle 1 ist einschließlich Entwicklungstensoren vierter Potenz vollständig. (Potenz = Anzahl der $\underline{C}_i$ -Glieder + Anzahl der $\underline{s}_i$ -Glieder des Entwicklungstensors). Das Schema bei Hess u. Waldmann (1966) (Seite 1539) war nur noch durch die irreduziblen Tensoren dritter und vierter Stufe zu ergänzen.

Der besseren Übersicht halber bezeichnen wir von nun an durch die ganze Arbeit hindurch die echten Tensoren der Stufe l und der Parität $P = (-1)^l$ mit $\phi_{i\mu_1 \dots \mu_l}^{(k)}$ und die Pseudotensoren der Stufe l und der Parität $P = (-1)^{l+1}$ mit $\psi_{i\mu_1 \dots \mu_l}^{(k)}$. Die entsprechenden Entwicklungskoeffizienten dazu seien durch $a_{i\mu_1 \dots \mu_l}^{(k)}$ und $b_{i\mu_1 \dots \mu_l}^{(k)}$ notiert.

λ	Skalare	PCT	Vektoren	PCT	Symm. irred. Tensoren 2. Stufe	PCT
0	$\phi_i^{(0)} = 1$	+0+				
1			$\phi_{i\mu}^{(1)} = \sqrt{2} \cdot C_{i\mu}$ $\psi_{i\mu}^{(1)} = \frac{\sqrt{3}}{S_{i0}} S_{i\mu}$	-1- +1-		
2	$\phi_i^{(2)} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(C_i^2 - \frac{3}{2} \right)$ $\psi_i^{(2)} = \frac{\sqrt{2}}{S_{i0}} C_{i\mu} S_{i\mu}$	+0+ -0+	$\phi_{i\mu}^{(2)} = \frac{\sqrt{3}}{S_{i0}} \epsilon_{\mu\nu\lambda} C_{i\nu} S_{i\lambda}$	-1+	$\phi_{i\mu\nu}^{(2)} = \sqrt{2} \overline{C_{i\mu} C_{i\nu}}$ $\psi_{i\mu\nu}^{(2)} = \frac{\sqrt{6}}{S_{i0}} \overline{C_{i\mu} S_{i\nu}}$ $\phi_{i\mu\nu}^{(2)} = \sqrt{\frac{15}{2}} \frac{1}{S_{i0} S_{i1}} \overline{S_{i\mu} S_{i\nu}}$	+2+ -2+ +2+
3			$\phi_{i\mu}^{(3)} = \frac{2}{\sqrt{5}} \left(C_i^2 - \frac{5}{2} \right) C_{i\mu}$ $\psi_{i\mu}^{(3)} = \frac{\sqrt{2}}{S_{i0}} \left(C_i^2 - \frac{3}{2} \right) S_{i\mu}$ $\phi_{i\mu}^{(3)} = \frac{3}{S_{i0} S_{i1}} \overline{S_{i\mu} S_{i\nu}} C_{i\nu}$ $\psi_{i\mu}^{(3)} = \frac{3}{S_{i0}} \sqrt{\frac{2}{5}} \overline{C_{i\mu} C_{i\nu}} S_{i\nu}$	-1- +1- -1- +1-	$\psi_{i\mu\nu}^{(3)} = \frac{\sqrt{10}}{S_{i0} S_{i1}} \epsilon_{\mu\nu\lambda} \overline{S_{i\mu} S_{i\lambda}} C_{i\lambda}$ $\phi_{i\mu\nu}^{(3)} = \frac{2}{S_{i0}} \epsilon_{\mu\nu\lambda} \overline{C_{i\mu} C_{i\lambda}} S_{i\lambda}$	-2- +2-
4	$\phi_i^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{15}} \left(C_i^4 - 5 C_i^2 + \frac{15}{2} \right)$ $\psi_i^{(4)} = \frac{2}{\sqrt{5} S_{i0}} \left(C_i^2 - \frac{5}{2} \right) C_{i\mu} S_{i\mu}$ $\phi_i^{(4)} = \frac{\sqrt{3}}{S_{i0} S_{i1}} \overline{C_{i\mu} C_{i\nu}} \cdot \overline{S_{i\mu} S_{i\nu}}$	+0+ -0+ +0+	$\phi_{i\mu}^{(4)} = \frac{\sqrt{6}}{S_{i0}} \left(C_i^2 - \frac{5}{2} \right) \epsilon_{\mu\nu\lambda} C_{i\nu} S_{i\lambda}$ $\psi_{i\mu}^{(4)} = \frac{\sqrt{6}}{S_{i0} S_{i1}} \epsilon_{\mu\nu\lambda} \overline{C_{i\mu} C_{i\lambda}} S_{i\nu} S_{i\lambda}$	-1+ +1+	$\phi_{i\mu\nu}^{(4)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(C_i^2 - \frac{3}{2} \right) \overline{C_{i\mu} C_{i\nu}}$ $\psi_{i\mu\nu}^{(4)} = \frac{2}{S_{i0}} \sqrt{\frac{3}{5}} \left(C_i^2 - \frac{5}{2} \right) \overline{C_{i\mu} S_{i\nu}}$ $\phi_{i\mu\nu}^{(4)} = \frac{\sqrt{3}}{S_{i0} S_{i1}} \left(C_i^2 - \frac{3}{2} \right) \overline{S_{i\mu} S_{i\nu}}$ $\psi_{i\mu\nu}^{(4)} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7} S_{i0} S_{i1}} \overline{C_{i\mu} C_{i\lambda}} \overline{S_{i\mu} S_{i\nu}}$ $\psi_{i\mu\nu}^{(4)} = \frac{2}{S_{i0}} \sqrt{\frac{5}{7}} \overline{C_{i\mu} C_{i\lambda}} \overline{S_{i\lambda}} S_{i\lambda}$ $\psi_{i\mu\nu}^{(4)} = \frac{5}{S_{i0} S_{i1} S_{i2}} \overline{S_{i\mu} S_{i\nu} S_{i\lambda}} C_{i\lambda}$	+2+ -2+ +2+ +2+ -2+ -2+

$$S_{iN} = \sqrt{S_i(S_i+1) - \frac{N(N+1)}{2}}$$

$N = 0, 1, 2, 3, \dots$

symm irred Tensoren 3. Stufe		PCT
$\phi_{i\mu\nu\lambda}^{(1)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{C_{i\mu} C_{i\nu} C_{i\lambda}}$ $\psi_{i\mu\nu\lambda}^{(1)} = \frac{\sqrt{6}}{S_{i0}} \sqrt{C_{i\mu} C_{i\nu} S_{i\lambda}}$ $\phi_{i\mu\nu\lambda}^{(2)} = \frac{\sqrt{15}}{S_{i0} S_{i1}} \sqrt{C_{i\mu} S_{i\nu} S_{i\lambda}}$ $\psi_{i\mu\nu\lambda}^{(2)} = \frac{\sqrt{35}}{2} \frac{1}{S_{i0} S_{i1} S_{i2}} \sqrt{S_{i\mu} S_{i\nu} S_{i\lambda}}$	-3- +3- -3- +3-	
Symm. irred. Tensoren 4. Stufe		PCT
$\phi_{i\mu\nu\lambda\sigma}^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{C_{i\mu} C_{i\nu} C_{i\lambda} C_{i\sigma}}$ $\phi_{i\mu\nu\lambda\sigma}^{(2)} = \sqrt{\frac{35}{8}} \frac{1}{S_{i0} S_{i1} S_{i2}} \sqrt{S_{i\mu} S_{i\nu} S_{i\lambda} S_{i\sigma}}$ $\psi_{i\mu\nu\lambda}^{(3)} = \frac{\sqrt{15}}{S_{i0} S_{i1}} \sqrt{C_{i\mu} C_{i\nu} S_{i\lambda} S_{i\sigma}} \epsilon_{\sigma\chi\lambda}$ $\phi_{i\mu\nu\lambda}^{(3)} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{S_{i0}} \sqrt{C_{i\mu} C_{i\nu} C_{i\sigma}} S_{i\lambda} \epsilon_{\sigma\chi\lambda}$ $\phi_{i\mu\nu\lambda}^{(4)} = \frac{\sqrt{105}}{2 S_{i0} S_{i1} S_{i2}} \sqrt{S_{i\mu} S_{i\nu} S_{i\lambda} C_{i\sigma}} \epsilon_{\sigma\chi\lambda}$	+3+ +4+ -3+ -3+	 $\phi_{i\mu\nu\lambda\sigma}^{(3)} = \frac{\sqrt{15}}{S_{i0} S_{i1}} \sqrt{C_{i\mu} C_{i\nu} S_{i\lambda} S_{i\sigma}}$ $\psi_{i\mu\nu\lambda\sigma}^{(4)} = \frac{2}{S_{i0}} \sqrt{C_{i\mu} C_{i\nu} C_{i\lambda} S_{i\sigma}}$ $\psi_{i\mu\nu\lambda\sigma}^{(5)} = \frac{\sqrt{35}}{S_{i0} S_{i1} S_{i2}} \sqrt{S_{i\mu} S_{i\nu} S_{i\lambda} C_{i\sigma}}$

Drücken wir die dimensionslosen Geschwindigkeiten $\underline{c}_i$ wieder durch $\underline{c}$ aus

$$6.1 \quad \underline{c}_i = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\underline{c}}{c_i^{(0)}} \quad c_i^{(0)} = \sqrt{\frac{3 k T_0}{m_i}} ,$$

so erhalten wir mit den durch die Erhaltungssätze nahegelegten Definitionen der Temperatur, des Wärmestromes und des Drucktensors die Bedeutung der Entwicklungskoeffizienten unsers Entwicklungssystems der Tabelle 1 aus der Formel 5.3 .

$$\frac{3}{2} k T_i = \langle E \rangle_i \quad E_i = \frac{1}{2} m_i \underline{c}^2 \quad T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^K T_i$$

$$\underline{q}_i = n_i \langle (E_i - \frac{5}{2} k T_0) \underline{c} \rangle_i \quad \underline{q} = \sum_{i=1}^K \underline{q}_i$$

$$P_{i\mu\nu} = S_i \langle C_\mu C_\nu \rangle_i \quad P_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^K P_{i\mu\nu}$$

Wir wollen nur die für die physikalische Anwendung dieser Arbeit wichtigen Größen notieren. Die Anderen erhält man aus der Arbeit von Hess u. Waldmann (1966), wenn man an den richtigen Stellen den Sortenindex anhängt.

a) Skalare

$$6.2 \quad \alpha_i^{(1)} = \frac{n_i - n_i^{(0)}}{n_i^{(0)}}$$

$$6.3 \quad \alpha_i^{(2)} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{T_i - T_0}{T_0}$$

b) Vektoren

$$6.4 \quad \underline{\alpha}_i^{(1)} = \sqrt{3} \frac{1}{c_i^{(0)}} \langle \underline{c} \rangle_i \quad \text{mittlere Geschwindigkeit der Komponente } i$$

$$6.5 \quad \underline{\alpha}_i^{(2)} = \sqrt{\frac{6}{5}} \frac{1}{n_i^{(0)} c_i^{(0)} k T_0} \underline{q}_i \quad \text{Wärmestrom der Komponente } i$$

$$6.6 \quad \underline{\alpha}_i^{(3)} = 3 \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{S_{i0} S_{i-1} c_i^{(0)}} \langle \underline{S}_i \underline{S}_{i-1} \cdot \underline{c} \rangle_i \quad \underline{\text{" Kagan - Vektor "}}$$

c) Tensoren zweiter Stufe

$$6.7 \quad a_{i\mu\nu}^{(4)} = \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{1}{C_i^{(4)2}} \langle \overline{C_\mu C_\nu} \rangle_i \quad \text{Reibungstensor der Komponente } i$$

$$6.8 \quad a_{i\mu\nu}^{(5)} = \frac{3}{2} \frac{\sqrt{5}}{S_{i0} S_{i1} C_i^{(5)2}} \left\langle \left(C - \frac{3}{2} C_i^{(4)2} \right) S_{i\mu} S_{i\nu} \right\rangle_i \quad \text{Gewichtete Tensorpolarisation}$$

2. Das verstümmelte System der Transportrelaxationsgleichungen.

Das Entwicklungssystem der Tabelle 1 von Seite 23 werde nun dazu verwendet um mit 5.11 die speziellen T.R.G.'en aller Größen im Entwicklungssystem einschließlich dritter Potenz explizit aufzuschreiben. Die mit einem Stern versehenen T.R.G.'en für $a_{i\mu\nu}^{(1)}$, $a_{i\mu\nu}^{(5)}$ sind exakt bis zu Entwicklungstensoren vierter Potenz einschließlich. Sie werden bei den Betrachtungen über die Viskosität die entscheidende Rolle spielen.

Bei der Berechnung der reduzierten $\underline{c}$ -Matrixelemente beachte man, daß nur solche Entwicklungstensoren einen Beitrag liefern, die bei verschiedenem Zeitumkehrverhalten und verschiedener Parität die gleiche Struktur in $\underline{s}_i$ haben. Für die reduzierten $\underline{s}$ -Matrixelemente bemerke man, daß bei den Entwicklungstensoren neben gleicher Parität und gleichem Zeitumkehrverhalten die gleiche Struktur in der $\underline{c}_i$ -Abhängigkeit vorliegen muß um einen nicht verschwindenden Wert zu geben. Reduzierte $\underline{s}$ -Matrixelemente, bei deren Bildung ein rein geschwindigkeitsabhängiger Entwicklungstensor beteiligt ist, geben Null.

Wenn wir noch bemerken, daß

$$(\dots | c | \dots)_i = \sqrt{\frac{2}{3}} c_i^{(0)} \langle \dots | v | \dots \rangle_{\text{Hess, Waldmann}} ,$$

so sind ergänzend zur Arbeit von Hess u. Waldmann (1966) nur die reduzierten $\underline{c}$ -Matrixelemente und $\underline{s}$ -Matrixelemente zu berechnen, die durch die Tensoren höherer Stufe neu hinzukommen.

Das spezielle System der Transportrelaxationsgleichungen

SKALARE

$$\frac{\partial}{\partial t} a_i^{(1)} + \frac{c_i^{(1)}}{3} \sqrt{3} \operatorname{div} \underline{a}_i^{(1)} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} a_i^{(2)} + \frac{c_i^{(2)}}{3} \operatorname{div} \left(\sqrt{2} \underline{a}_i^{(1)} + \sqrt{5} \underline{a}_i^{(3)} \right) + \sum_{j=1}^K {}_{+0} \omega_{ij}^{(22)} a_j^{(2)} = 0$$

PSEUDOSKALARE

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_i^{(1)} + \frac{c_i^{(1)}}{3} \operatorname{div} \left(\underline{\rho}_i^{(1)} + \sqrt{\frac{2}{3}} \underline{\rho}_i^{(2)} + \sqrt{\frac{10}{3}} \underline{\rho}_i^{(3)} \right) - \sqrt{\frac{2}{3}} \omega_{H1} \underline{h} \cdot \underline{a}_i^{(2)} + \sum_{j=1}^K {}_{-0} \omega_{ij}^{(11)} \rho_j^{(1)} = 0$$

V E K T O R E N

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} a_{i\mu} + \frac{c_i^{(6)}}{3} \text{grad}_\mu (\sqrt{3} a_i^{(6)} + \sqrt{2} a_i^{(2)}) + c_i^{(6)} \sqrt{2} \frac{\partial}{\partial x_\nu} a_{i,\mu\nu}^{(6)} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} a_{i\mu}^{(2)} + \sqrt{2} \omega_{hi} h_\mu \rho_i^{(6)} + \frac{1}{2} \omega_{hi} (h \times \underline{a}_i)^{(2)}_\mu + \frac{c_i^{(6)}}{6} \text{rot}_\mu (\sqrt{6} \underline{\rho}_i^{(4)} + 2 \underline{\rho}_i^{(2)} + \sqrt{5} \underline{\rho}_i^{(3)}) + \frac{2}{3} \sqrt{2} c_i \frac{\partial}{\partial x_\nu} a_{i,\mu\nu}^{(3)} - \frac{1}{\sqrt{2}} \omega_{hi} h_\nu \rho_{i,\mu\nu}^{(4)} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} a_{i\mu}^{(3)} + \frac{c_i^{(6)}}{3} \text{grad}_\mu \sqrt{5} a_i^{(2)} + \frac{c_i^{(6)}}{3} 2 \sqrt{3} \frac{\partial}{\partial x_\nu} a_{i,\mu\nu}^{(6)} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} a_{i\mu}^{(4)} + \frac{3}{2} \omega_{hi} (h \times \underline{a}_i)^{(4)}_\mu + \frac{c_i^{(6)}}{5} \sqrt{5} \frac{\partial}{\partial x_\nu} a_{i,\mu\nu}^{(2)} + \frac{3}{\sqrt{6}} \omega_{hi} h_\nu \rho_{i,\mu\nu}^{(2)} &= 0 \end{aligned}$$

P S E U D O V E K T O R E N

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_{i\mu}^{(1)} + \frac{c_i^{(6)}}{3} \text{grad}_\mu \rho_i^{(6)} - \frac{c_i^{(6)}}{\sqrt{6}} \text{rot}_\mu \underline{a}_i^{(2)} + \omega_{hi} (h \times \underline{\rho}_i)^{(6)}_\mu + \frac{c_i^{(6)}}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \rho_{i,\mu\nu}^{(6)} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho_{i\mu}^{(2)} + \frac{c_i^{(6)}}{3} \text{grad}_\mu \sqrt{3} \rho_i^{(6)} - \frac{c_i^{(6)}}{6} \text{rot}_\mu 2 \underline{a}_i^{(2)} + \omega_{hi} (h \times \underline{\rho}_i)^{(6)}_\mu + \frac{c_i^{(6)}}{3} \sqrt{2} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \rho_{i,\mu\nu}^{(4)} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho_{i\mu}^{(3)} + \frac{c_i^{(6)}}{3} \text{grad}_\mu \sqrt{\frac{10}{3}} \rho_i^{(6)} - \frac{c_i^{(6)}}{6} \text{rot}_\mu \sqrt{5} \underline{a}_i^{(2)} - \frac{\omega_{hi}}{6} (h \times \underline{\rho}_i)^{(3)}_\mu - \omega_{hi} \frac{2}{5} \sqrt{2} h_\nu a_{i,\mu\nu}^{(3)} + \frac{c_i^{(6)}}{6} \sqrt{2} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \rho_{i,\mu\nu}^{(4)} &= 0 \end{aligned}$$

TENSOREN ZWEITER STUFE

$$\frac{\partial}{\partial t} a_{i\mu\nu}^{(1)} + c_i^{(1)} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\partial}{\partial x_\mu} a_{i\nu}^{(1)} + \frac{2}{3} c_i^{(1)} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} a_{i\nu}^{(1)} + c_i^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_\lambda} a_{i\mu\nu\lambda}^{(1)} + \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^6 \omega_{ij}^{(1k)} a_{j\mu\nu}^{(k)} = 0 \quad *$$

$$\frac{\partial}{\partial t} a_{i\mu\nu}^{(2)} + \frac{c_i^{(2)}}{5} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\partial}{\partial x_\mu} a_{i\nu}^{(2)} + 2 \omega_{H_i} \square_{\mu\nu\lambda\mu\nu} h_\lambda a_{i\mu\nu}^{(2)} + \frac{c_i^{(2)}}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} \square_{\mu\nu\lambda\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\lambda} a_{i\mu\nu}^{(2)} + \frac{1}{\sqrt{3}} c_i^{(2)} \frac{\partial}{\partial x_\mu} a_{i\mu\nu\lambda}^{(2)} + \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^3 \omega_{ij}^{(2k)} a_{j\mu\nu}^{(k)} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} a_{i\mu\nu}^{(3)} + \frac{2\sqrt{2}}{3} c_i^{(3)} \frac{\partial}{\partial x_\mu} a_{i\nu}^{(3)} + \frac{3\sqrt{2}}{5} \omega_{H_i} h_\mu a_{i\nu}^{(3)} + \frac{3}{2} \omega_{H_i} \square_{\mu\nu\lambda\mu\nu} h_\lambda a_{i\mu\nu}^{(3)} + \frac{c_i^{(3)}}{3} \square_{\mu\nu\lambda\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\lambda} a_{i\mu\nu}^{(3)} - \sqrt{\frac{2}{3}} \omega_{H_i} h_\mu a_{i\mu\nu}^{(3)} + \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^3 \omega_{ij}^{(3k)} a_{j\mu\nu}^{(k)} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} a_{i\mu\nu}^{(4)} + \sqrt{\frac{2}{15}} c_i^{(4)} \frac{\partial}{\partial x_\mu} a_{i\nu}^{(4)} + 2 \omega_{H_i} \square_{\mu\nu\lambda\mu\nu} h_\lambda a_{i\mu\nu}^{(4)} + \frac{2\sqrt{2}}{3} c_i^{(4)} \square_{\mu\nu\lambda\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\lambda} a_{i\mu\nu}^{(4)} + \frac{12}{3} c_i^{(4)} \frac{\partial}{\partial x_\mu} a_{i\mu\nu\lambda}^{(4)} + \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^6 \omega_{ij}^{(4k)} a_{j\mu\nu}^{(k)} = 0 \quad *$$

PSEUDOTENSOREN ZWEITER STUFE

$$\frac{\partial}{\partial t} b_{i\mu\nu}^{(1)} + \frac{\omega_{H_i}}{\sqrt{2}} h_\mu a_{i\nu}^{(2)} + \frac{c_i^{(1)}}{5} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} b_{i\mu}^{(1)} + \sqrt{\frac{2}{3}} b_{i\nu}^{(2)} + \frac{1}{\sqrt{10}} b_{i\mu}^{(3)} \right) - \frac{c_i^{(1)}}{3} \square_{\mu\nu\lambda\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\lambda} a_{i\mu\nu}^{(3)} + \omega_{H_i} \square_{\mu\nu\lambda\mu\nu} h_\lambda b_{i\mu\nu}^{(1)} + \sqrt{\frac{2}{3}} c_i^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_\mu} b_{i\mu\nu}^{(1)} + \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^2 \omega_{ij}^{(1k)} b_{j\mu\nu}^{(k)} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} b_{i\mu\nu}^{(2)} - \frac{2}{\sqrt{10}} \omega_{H_i} h_\mu a_{i\nu}^{(4)} - \frac{c_i^{(2)}}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} \square_{\mu\nu\lambda\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\lambda} a_{i\mu\nu}^{(2)} + \frac{5}{3} \omega_{H_i} \square_{\mu\nu\lambda\mu\nu} h_\lambda b_{i\mu\nu}^{(2)} + \sqrt{\frac{2}{3}} \omega_{H_i} h_\mu a_{i\mu\nu\lambda}^{(2)} + \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^2 \omega_{ij}^{(2k)} b_{j\mu\nu}^{(k)} = 0$$

TENSOREN DRITTER STUFE

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} a_{i,\mu\nu\lambda}^{(1)} + c_i^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_\mu} a_{i,\nu\lambda}^{(1)} &+ \sum_{j=1}^K \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \beta=1}}^2 \omega_{ij}^{(1\beta)} a_{j,\mu\nu\lambda}^{(1\alpha)} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} a_{i,\mu\nu\lambda}^{(2)} + \frac{c_i^{(2)}}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial x_\mu} a_{i,\nu\lambda}^{(2)} - \sqrt{\frac{2}{3}} \omega_{hi} h_\mu \overline{b_{\nu\lambda}^{(2)}} &+ 2 \omega_{hi} \square_{\mu\nu\lambda, \kappa, \mu'\nu'\lambda'} h_\kappa a_{i,\mu'\nu'\lambda'}^{(2)} \\ &+ \sum_{j=1}^K \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \beta=1}}^2 \omega_{ij}^{(2\beta)} a_{j,\mu\nu\lambda}^{(2\alpha)} = 0 \end{aligned}$$

PSEUDOTENSOREN DRITTER STUFE

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} b_{i,\mu\nu\lambda}^{(1)} + \sqrt{\frac{2}{3}} \omega_{hi} h_\mu \overline{a_{i,\nu\lambda}^{(1)}} + \sqrt{\frac{2}{3}} c_i^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_\mu} b_{i,\nu\lambda}^{(1)} &+ \frac{2}{3} \omega_{hi} \square_{\mu\nu\lambda, \kappa, \mu'\nu'\lambda'} h_\kappa b_{i,\mu'\nu'\lambda'}^{(1)} \\ &+ \sum_{j=1}^K \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \beta=1}}^2 \omega_{ij}^{(1\beta)} b_{j,\mu\nu\lambda}^{(1\alpha)} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} b_{i,\mu\nu\lambda}^{(2)} &+ 3 \omega_{hi} \square_{\mu\nu\lambda, \kappa, \mu'\nu'\lambda'} h_\kappa b_{i,\mu'\nu'\lambda'}^{(2)} \\ &+ \sum_{j=1}^K \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \beta=1}}^2 \omega_{ij}^{(2\beta)} b_{j,\mu\nu\lambda}^{(2\alpha)} = 0 \end{aligned}$$

§ 7 Vorläufige Diskussion der speziellen Transportgleichungen

Die erste Gleichung der Skalare stellt wieder die Kontinuitätsgleichung für die Teilchenerhaltung der Sorte i dar. In linearer Näherung gilt:

$$7.1 \quad \frac{\partial}{\partial t} n_i + n_i^{(0)} \operatorname{div} \langle \underline{v} \rangle_i = 0 \quad ,$$

bezw. bei Summation über i

$$7.2 \quad \frac{\partial}{\partial t} n + n_0 \operatorname{div} \underline{v} = 0 \quad .$$

Die mittlere Massengeschwindigkeit des Gasgemisches, oder die Gasgeschwindigkeit schlechthin werde in der ganzen Arbeit mit $\underline{v}$ bezeichnet

$$7.3 \quad \underline{v} = \frac{\sum_{i=1}^K \rho_i \langle \underline{v} \rangle_i}{\rho} \quad .$$

Multiplikation der zweiten Gleichung der Skalare mit $m_i c_i^{(0)2} n_i^{(0)}$ und Summation über i liefert mit 4.18

$$\sum_{i=1}^K m_i c_i^{(0)2} n_i^{(0)} \omega_{ij}^{(2k')} = 0 \quad \left(\nabla_{\mu} \operatorname{div} k', j \right) \quad ,$$

Benutzung von 6.3 und 6.5, den Energiesatz. Wir schreiben uns nur die linearisierte Form auf:

$$n_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{3}{2} kT \right) + \operatorname{div} \left(q + kT_0 n_0 \underline{v} \right) = 0 \quad .$$

Die erste Gleichung der polaren Vektoren multiplizieren wir mit $m_i c_i^{(0)} n_i^{(0)}$ und summieren wieder über i . Jetzt schreibt sich 4.18

$$\sum_{i=1}^K m_i c_i^{(0)} n_i^{(0)} \omega_{ij}^{(1k')} = 0 \quad \left(\nabla_{\mu} \operatorname{div} k', j \right)$$

und liefert mit

$$7.4 \quad \overline{P}_{\mu\nu} = \sqrt{2} kT_0 \sum_{i=1}^K n_i^{(0)} a_{i\mu\nu} \quad \text{und} \quad P = n kT \quad \boxed{P_{uv} = P \delta_{uv} + \overline{P}_{uv}}$$

den Impulserhaltungssatz. Auch davon brauchen wir nur die linearisierte Form

$$7.5 \quad \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} v_{\mu} + \frac{\partial P}{\partial x_{\mu}} + \frac{\partial \overline{P}_{uv}}{\partial x_{\nu}} = 0 \quad .$$

Mit den Eigenschaften der ω - Matricelemente für ein reines Gas wollen wir uns noch notieren:

$$7.6 \quad {}_{+0}\omega_{ii}^{(2k^1)} = \sum_{j \neq i} {}_{+0}\omega_{ij}^{(2k^1)}$$

$$7.7 \quad {}_{-1}\omega_{ii}^{(4k^1)} = \sum_{j \neq i} {}_{-1}\omega_{ij}^{(4k^1)}$$

Die Impulserhaltung bewirkt zusätzlich:

$$7.8 \quad {}_{-1}\omega_{ii}^{(23)} = \sum_{j \neq i} {}_{-1}\omega_{ij}^{(23)}$$

Von den Onsagersymmetrien 4.13 werden wir bei den Anwendungen nur benötigen:

$$7.9 \quad n_i^{(6)} {}_{-1}\omega_{ij}^{(42)} = - n_j^{(6)} {}_{-1}\omega_{ji}^{(24)}$$

$$7.10 \quad n_i^{(6)} {}_{-1}\omega_{ij}^{(64)} = n_j^{(4)} {}_{-1}\omega_{ji}^{(64)}$$

$$7.11 \quad n_i^{(6)} {}_{+2}\omega_{ij}^{(25)} = n_j^{(6)} {}_{+2}\omega_{ji}^{(51)}$$

Anmerkung zu 7.6 und 7.7 bzw. 7.8 : Nach s.Hess u. L.Waldmann (1966)

$${}_{+0}\omega_i^{(4k^1)} = 0$$

$${}_{+0}\omega_i^{(2k^1)} = 0$$

$${}_{-1}\omega_i^{(4k^1)} = 0$$

$${}_{-1}\omega_i^{(23)} = 0$$

Teil D

Diffusion und Viskosität

im Magnetfeld

§ 8 Die Näherung der kleinen Nichtsphärizität

Nach den allgemeinen Betrachtungen der ersten drei Teile wollen wir uns nun konkreten physikalischen Problemen zuwenden. Wir interessieren uns für die Beeinflussung der Diffusion und der Viskosität eines binären Gasgemisches aus Spinteilchen durch ein äußeres homogenes Magnetfeld.

(Senftleben-Beenakker-Effekt = S.B.E.)

Die Diffusionsgeschwindigkeit $v_{12} = \langle c \rangle_1 - \langle c \rangle_2$ und der Reibungsdruck $\overline{p}_{\mu\nu}$ setzen sich gemäß 6.4 und 7.4 aus den Entwicklungskoeffizienten $a_{i\mu}^{(1)}$ und $a_{i\mu\nu}^{(1)}$ zusammen. Um speziell für die Diffusion und die innere Reibung die phänomenologischen Zusammenhänge zu bekommen, müssen wir deshalb die T.R.G.'en für $a_{i\mu}^{(1)}$ und $a_{i\mu\nu}^{(1)}$ betrachten. Wir wollen dabei in allen weiteren Überlegungen ganz und gar von thermischen Effekten absehen. Das heißt, daß wir alle Relaxationskonstanten $_{-1}\omega_{ij}^{(k3)}$ (Kopplungen an den Wärmestrom) in den für die Diffusion und Viskosität interessierenden Gleichungen Null setzen. Vernachlässigt man außerdem die Korrekturen, die durch spinunabhängige Entwicklungstensoren mit höheren Sonine-Polynomen zustande kommen, so würden bei einem Gasgemisch von spinlosen Teilchen die Diffusion und Viskosität allein durch die Relaxationskonstanten $_{-1}\omega_{ij}^{(11)}$ und $_{+2}\omega_{ij}^{(11)}$ bestimmt werden.

Durch den inneren Drehimpuls der Teilchen treten jedoch Relaxationskoeffizienten auf $_{-1}\omega_{ij}^{(k1)}$ $k = 2, 4, \dots$ $_{+2}\omega_{ij}^{(k1)}$ $k = 2, 3, 5, \dots$, die Mittelwerte von Spingrößen z.B. Azimutalpolarisation, Tensorpolarisation, an die Diffusionsgeschwindigkeit bzw. den Reibungsdruck koppeln. Um den Einfluß dieser verschiedenen nichtdiagonalen Relaxationskoeffizienten beim Gasgemisch zu sehen, benutzen wir die Ideen von S. Hess und W.E. Köhler (1968): Näherung der kleinen Nichtsphärizität.

S. Hess und W.E. Köhler haben gezeigt, daß für zweiatomige Moleküle, unter Vernachlässigung einer magnetischen Dipol-Dipol-Wechselwirkung, bei elastischem Stoß die Streuamplitudenmatrix sich in der folgenden Weise schreibt:

8.1

$$a_{ij}(\underline{e} \underline{e}' \underline{S}_{iI} \underline{S}_{jII} E_{ij}) = a_{ij}^{\text{spha.}}(\underline{e} \underline{e}' E_{ij}) + \\ + \varepsilon A_{ij\mu\nu}(\underline{e} \underline{e}' E_{ij}) \left[\left(S_i(S_i+1) - \frac{3}{4} \right)^{-1} \overline{S_{iI\mu} S_{iIV}} \cdot 1_j + \left(S_j(S_j+1) - \frac{3}{4} \right)^{-1} \overline{S_{jII\mu} S_{jIV}} \cdot 1_i \right] \\ + \varepsilon (\text{Term ohne Beitrag}) \\ + O(\varepsilon^n) \quad n > 1 \quad (\text{Glieder höherer Ordnung in } \varepsilon) .$$

Der Entwicklungsparameter ε ist dabei ein Maß für die Nichtsphärizität der Wechselwirkung. Als typische Werte für ε erwartet man $\varepsilon \leq 10^{-1}$. Die Kroneckerprodukte mit den Einheitsmatrizen in den Spinräumen der Sorten i und j haben wir mit $\otimes 1_i$ und $\otimes 1_j$ bezeichnet. Wichtig in 8.1 ist die Symmetrie

$$A_{ij\mu\nu}(\underline{e} \underline{e}' E_{ij}) = A_{ij\nu\mu}(\underline{e}' \underline{e} E_{ij}) ,$$

die aus der Paritäts- und der Zeitumkehrinvarianz der Streuamplitudenmatrizen folgt und die bewirkt, daß a_{ij} bis zu linearen Gliedern in ε symmetrisch gegen die Vertauschung $\underline{e} \underline{e}' \longrightarrow \underline{e}' \underline{e}$ ist.

$$8.2 \quad a_{ij} = a_{ij}(\underline{e} \underline{e}' \underline{S}_{iI} \underline{S}_{jII} E_{ij}) = a_{ij}(\underline{e}' \underline{e} \underline{S}_{iI} \underline{S}_{jII} E_{ij}) = a_{ij}^0 \quad \text{bis } O(\varepsilon)$$

Die ω -Matrixelemente für das Gemisch setzen sich gemäß 5.10 aus $\omega_{Pl ij}^{(kk')\top}$, $\omega_{Pl ij}^{(kk')\top}$ und solchen für das reine Gas zusammen. Die Größenordnungen der Relaxationskoeffizienten für das reine Gas finden sich bei S. Hess u. L. Waldmann (1968). Wir brauchen deshalb nur noch $\omega_{Pl ij}^{(kk')\top}$ und $\omega_{Pl ij}^{(kk')\top}$ näher anzusehen. Für den Fall, wo der Entwicklungstensor $\phi_{\dots}^{(Pk')}$ oder a_{ij} spinunabhängig ist, können wir schreiben:

$$\tau_e \omega_{ij}^{(RR')\top} = \frac{1}{2\ell+1} \text{tr}_I \text{tr}_{II} \left(\left(\frac{j_{iI}^{(e)} j_{jII}^{(e)}}{n_i^{(e)}} \right) \phi_{iI\mu_1 \dots \mu_\ell}^{(PR)} \left(\phi_{iI}^{(PR)} - \phi_{iI}^{(PR)'} \right)_{\mu_1 \dots \mu_\ell} a_{ij} a_{ij}^+ g^3 d^2 d^2 d^3 d g \right) \\ 8.3 \quad \tau_e \omega_{ij}^{(RR')\top} = \frac{1}{2\ell+1} \text{tr}_I \text{tr}_{II} \left(\left(\frac{j_{iI}^{(e)} j_{jII}^{(e)}}{n_i^{(e)}} \right) \phi_{iI\mu_1 \dots \mu_\ell}^{(PR)} \left(\phi_{jII}^{(PR)} - \phi_{jII}^{(PR)'} \right)_{\mu_1 \dots \mu_\ell} a_{ij} a_{ij}^+ g^3 d^2 d^2 d^3 d g \right)$$

In Hinblick auf 8.1 und wegen

$$\text{tr} \left(\overline{S_{\mu_1} \dots S_{\mu_\ell}} \overline{S_{\nu_1} \dots S_{\nu_\ell}} \right) = 0 \quad \ell \neq \ell'$$

können von den nichtdiagonalen ω -Matrixelementen 8.3, $k \neq k'$, die eine

Spingröße $\phi_{\dots}^{(Pk)}$ und eine spinunabhängige Größe $\phi_{\dots}^{(Pk')}$ koppeln, nur solche Beiträge bis zu $O(\epsilon)$ liefern, bei denen die Spinstruktur von $\phi_{\dots}^{(Pk)}$ die Form $\overline{s_{iI} s_{iI'}}$ hat. Wegen

$$\left(\phi_{iI}^{(Pk')} - \phi_{iI}^{(Pk)} \right)_{\mu_1 \dots \mu_e} = - \left(\phi_{iI}^{(Pk')} - \phi_{iI}^{(Pk)} \right)_{\mu_1 \dots \mu_e} \quad (\text{Oberer Strich bedeutet } \underline{e} \underline{e'} \longrightarrow \underline{e'} \underline{e})$$

und wegen 8.2, zusammen mit

$$f_{iI}^{(o)'} f_{jII}^{(o)'} = f_{iI}^{(o)} f_{jII}^{(o)}$$

geben nur vom Spin abhängige $\phi_{\dots}^{(Pk)}$ für welche ja

$$\phi_{\dots}^{(Pk)} = \phi_{\dots}^{(Pk')}$$

ebenfalls keine Beiträge bis zu $O(\epsilon)$. Damit können wir mit den Entwicklungstensoren der Tabelle 1 von Seite 23 sofort die Größenordnung der interessierenden $\omega_{ij}^{(kk')\gamma}$ und $\omega_{ij}^{(kk')\gamma}$ ablesen. Zusammen mit

$$-1 \omega_i^{(k1)} = 0 \quad (\text{Impulserhaltung im reinen Gas aus Teilchen der Sorte i})$$

und den Ergebnissen von S. Hess und L. Waldmann (1968)

$$+2 \omega_i^{(21)} = O(\epsilon^3) \quad +2 \omega_i^{(31)} = O(\epsilon^2) \quad +2 \omega_i^{(51)} = O(\epsilon^3) \quad (\text{reines Gas})$$

können wir mit 5.10 schreiben:

$$\begin{array}{l} -1 \omega_{ij}^{(21)} = O(\epsilon^3) \quad n > 1 \\ +2 \omega_{ij}^{(31)} = O(\epsilon^2) \quad n > 1 \end{array} \quad \boxed{-1 \omega_{ij}^{(41)} = O(\epsilon)} \quad \boxed{+2 \omega_{ij}^{(51)} = O(\epsilon^3) \quad n > 1} \quad \boxed{+2 \omega_{ij}^{(51)} = O(\epsilon)}$$

Von den Relaxationskonstanten, die zwei spin-abhängige Größen miteinander koppeln, geben manche schon einen Beitrag, wenn nur der sphärische Anteil der Streuamplitudenmatrix verwendet wird. In diesem Fall gilt wieder 3.3. Wir wollen nur diejenigen als Beispiele erwähnen, welche bei der Anwendung eine Rolle spielen:

$$\begin{array}{ll} -1 \omega_{ij}^{(41)} = O(\epsilon^3) & -2 \omega_{ij}^{(22)} = O(\epsilon^3) \\ +2 \omega_{ij}^{(55)} = O(\epsilon^3) & -3 \omega_{ij}^{(32)} = O(\epsilon^3) \end{array}$$

§ 9 Diffusion im binären Gasgemisch

=====

Von nun an seien alle Überlegungen auf ein binäres Gasgemisch bezogen. Die an den Größen rechts unten stehenden Sortenindizes i bzw. j ,die die Komponenten des Gemisches kennzeichnen, durchlaufen von jetzt ab nur noch die arabischen Ziffern 1 und 2 .

Wir betrachten damit ein stationäres Diffusionsproblem unter Vernachlässigung der Einflüsse, die durch Kopplungen des Diffusionsstromes mit dem Wärmestrom hervorgerufen werden. (Wir setzen: $_{-1}\omega_{ij}^{(13)} = 0$.). Insbesondere soll kein äußerer Temperaturgradient vorhanden sein. Ausdrücke des Strömungsterms, die auf höhere Ortsableitungen von Molenbruch

$$\gamma_1 = \frac{n_1}{n} =: \gamma \approx \frac{n_+}{n_0} \quad (\text{ in linearer Näherung })$$

und Geschwindigkeitsfeld führen, werden ebenfalls außer Acht gelassen. (1. Hydrodynamische Näherung). Von den Verknüpfungen zwischen Diffusionsgeschwindigkeit

$$v_{12} = \langle \underline{c} \rangle_1 - \langle \underline{c} \rangle_2$$

und spinabhängigen Größen seien nur die Kopplungen mit dem "Kaganvektor" 6.6

$$\underline{Q}_i^{(u)} \propto \langle \sqrt{\underline{S}_i \cdot \underline{S}_i} \cdot \underline{C} \rangle_i$$

berücksichtigt, weil nach Überlegungen des vorhergehenden Paragraphen die R.K. (R.K. = Relaxationskoeffizienten) im Gasgemisch

$$9.1 = 7.10 \quad n_i^{(u)} \omega_{ij}^{(u)} = n_j^{(u)} \omega_{ji}^{(u)}$$

von kleinster Potenz und niedrigster Ordnung $O(\epsilon)$ sind.

Mit diesen Bemerkungen schreibt sich dann die T.R.G. für $\underline{a}_i^{(1)}$ der Sorte i = 1 in vereinfachter Form:

$$9.2 \quad \frac{\sqrt{3}}{3} c_i^{(u)} \text{grad } a_i^{(1)} + \sum_{j=1}^2 \omega_{ij}^{(u)} \underline{a}_j^{(1)} + \sum_{j=1}^2 \omega_{ij}^{(4u)} \underline{a}_j^{(1)} = 0 \quad .$$

Zusammen mit der Bedeutung der Entwicklungskoeffizienten 6.4

$$\underline{Q}_i^{(1)} = \frac{\sqrt{3}}{c_i^{(u)}} \langle \underline{C} \rangle_i$$

ergibt sich aus dem Impulserhaltungssatz 4.16 in der Form 9.3

$$9.3 \quad \sum_{j=1}^2 m_j c_j^{(0)} \omega_{ij}^{(1)} = 0$$

die folgende Identität

$$9.4 \quad \sum_{j=1}^2 \omega_{ij}^{(1)} \underline{a}_j^{(1)} = \frac{\sqrt{3}}{c_i^{(0)}} \omega_{i1}^{(1)} \underline{v}_{12}$$

Daraus erhalten wir für $k = 1$, $i = 1$ mit 9.2 und

$$\text{grad } a_1^{(1)} = \frac{n_o}{n_1^{(0)}} \text{grad } \gamma$$

die Beziehung 9.5, welche den weiteren Betrachtungen zugrunde liegt.

$$9.5 \quad \underline{v}_{12} = -D_{is} \frac{n_s^2}{n_1 n_2^{(0)}} \frac{\partial \delta}{\partial x} - \frac{c_1^{(0)}}{\sqrt{3}} \frac{\sum_{j=1}^2 \omega_{ij}^{(1)} \underline{a}_j^{(1)}}{\omega_{i1}^{(1)}}$$

Die erste Zeile davon drückt den bekannten Zusammenhang von Diffusionsstrom und Molenbruchgradienten aus, wenn die Kopplungen mit spinabhängigen Größen vollkommen außer Acht gelassen werden. Für diese Diffusionskonstante D_{is} ergibt sich:

$$D_{is} = \frac{4}{3} \frac{n_2^{(0)} c_s^{(0)}}{n_o \omega_{i1}^{(1)}}$$

Beachten wir 7.7

$$-\omega_{11}^{(11)} = -\omega_{12}^{(11)^T},$$

so erhalten wir bei Vernachlässigung des spinabhängigen Anteils der Streuamplitude (einatomiges Gasgemisch) ein vertrautes Ergebnis

$$D_{is} = \frac{3 k T_o}{16 n_o m_{12}} \frac{1}{\Omega_{12}^{(1)}}$$

Die Definition der Chapman - Integrale $\Omega_{ij}^{(1r)}$ findet sich bei Waldmann. (Handbuch Bd. XII S.393)

Interessant wird natürlich nun der Einfluß des "Kagan-Vektors" $\underline{a}_1^{(4)}$, an dem das Magnetfeld angreifen kann und somit den S.B.E. der Diffusion hervorruft.

Bevor wir jedoch mit den entsprechenden T.R.G.'en aus der Beziehung 9.5 den Vektor $\underline{a}_j^{(4)}$ eliminieren, wollen wir für diesen Teil der Arbeit einige weitere Vereinbarungen treffen.

Eine fettgedruckte Größe mit einem hochgestellten, eingeklammerten Index soll als Spalte oder Zeile in den Sortenindizes $i = 1, 2$ gelesen werden. Also z.B.

$$\underline{n}^{(a)} \hat{=} \begin{pmatrix} n_1^{(a)} \\ n_2^{(a)} \end{pmatrix} \quad \underline{a}^{(k)} \hat{=} \begin{pmatrix} a_1^{(k)} \\ a_2^{(k)} \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{a}}^{(k)} \hat{=} \begin{pmatrix} \underline{a}_1^{(k)} \\ \underline{\underline{a}}_2^{(k)} \end{pmatrix} .$$

Der Tensorcharakter im Ortsraum bleibt nach wie vor entweder durch entsprechende Unterstreichungen oder durch griechische Indizes gekennzeichnet. In Hinblick auf diese Konvention wurden abweichend von $n_i^{(o)}$, $\langle \dots \rangle_i^{(o)}$ die Gleichgewichtsmittelwerte für Gesamtteilchenzahl und Temperatur mit n_o bzw. T_o bezeichnet.

Ein fettgedrucktes Symbol mit zwei hochgestellten, eingeklammerten Indizes werde als 2x2 Matrix in den Sortenindizes betrachtet. Z.B.

$$\rho_c \omega^{(RR')} \hat{=} \begin{pmatrix} \rho_c \omega_{11}^{(RR')} & \rho_c \omega_{12}^{(RR')} \\ \rho_c \omega_{21}^{(RR')} & \rho_c \omega_{22}^{(RR')} \end{pmatrix} .$$

Damit lassen sich mit dem Verknüpfungssymbol $\bullet$ die Regeln der Matrizenmultiplikation anwenden. Z.B.

$$\sum_j \omega_{ij}^{(4)} \underline{a}_j^{(4)} = \left(\omega^{(4)} \bullet \underline{a}^{(4)} \right)_i .$$

Mit dieser Schreibweise drücken sich dann die T.R.G.'en für $\underline{a}^{(4)}$ und allen weiteren relevanten Größen, die über $\underline{a}^{(4)}$ mit dem Diffusionsstrom koppeln, in der folgenden Weise aus:

$$9.6 \quad \frac{3}{2} \omega_{H1} \left(\underline{h} \times \underline{a} \right)_u + \frac{3}{\sqrt{40}} \omega_{H1} h_v b_{i, \mu\nu}^{(2)} + \left(\omega^{(4)} \bullet \underline{a}_u^{(4)} \right)_i + \left(\omega^{(4)} \bullet \underline{a}_u^{(4)} \right)_i = 0$$

$$9.7 \quad -\frac{3}{\sqrt{40}} \omega_{H1} \overline{h_{\mu} a_{i\nu}}^{(4)} + \frac{5}{3} \omega_{H1} \square_{\mu\nu\lambda, \mu'\nu'} h_{\lambda} b_{i, \mu'\nu'}^{(2)} + \sqrt{\frac{2}{3}} \omega_{H1} h_{\mu} a_{i, \mu\nu}^{(2)} + \left(\omega^{(2)} \bullet \underline{\underline{a}}_{\mu\nu}^{(2)} \right)_i = 0$$

$$9.8 \quad -\sqrt{\frac{2}{3}} \omega_{H1} \overline{h_{\mu} b_{i\nu\lambda}}^{(2)} + 2 \omega_{H1} \square_{\mu\nu\lambda, \mu'\nu'\lambda'} h_{\mu} a_{i, \mu'\nu'\lambda'}^{(2)} + \left(\omega^{(22)} \bullet \underline{\underline{a}}_{\mu\nu\lambda}^{(2)} \right)_i = 0 .$$

Selbstverständlich sind die gleichen Näherungen vorgenommen worden, die zu 9.2

geführt haben. Berücksichtigung der nichtdiagonalen R.K. in den Gleichungen für $\underline{b}^{(2)}$ und $\underline{a}^{(2)}$ würde zu Gliedern höherer Ordnung als $O(\epsilon)$ in den Gleichungen führen.

Für den allgemeinen Fall, wo beide Sorten des Gemisches aus Spinteilchen bestehen, existiert für eine Matrix in den Sortenindizes $Pl_{ij}^{(kk)}$ immer eine Inverse $Pl_{ij}^{(kk)}$ mit

$$9.9 \quad 1 = \tau_e \underline{x}^{(kk)} \cdot \tau_e \underline{\omega}^{(kk)} \triangleq \left(\tau_e \underline{x}^{(kk)} \cdot \tau_e \underline{\omega}^{(kk)} \right)_{ij} = \sum_{j'} \tau_e x_{ij'}^{(kk)} \tau_e \omega_{j'j}^{(kk)} = \delta_{ij}.$$

Wie im vorigen Paragraphen bereits erwähnt, sind die R.K.

$$-1 \omega_{ij}^{(44)} \quad -2 \omega_{ij}^{(22)} \quad -3 \omega_{ij}^{(22)}$$

schon bei Verwendung des sphärischen Anteils der Streuamplitudenmatrix von Null verschieden. Die expliziten Ausdrücke zeigen, daß außerdem in dieser Näherung gilt:

$$9.10 \quad -1 \omega_{ij}^{(44)} \approx -2 \omega_{ij}^{(22)} \approx -3 \omega_{ij}^{(22)}.$$

Führen wir schließlich noch die Winkelmatrizen ein

$$9.11 \quad \tau_e \omega_{ij}^{(kk)} = \tau_e x_{ij}^{(kk)} \omega_{Hj},$$

so erhalten wir durch Matrizenmultiplikation von 9.6 mit $-1 \underline{x}^{(44)}$, Multiplikation von 9.7 mit $-2 \underline{x}^{(22)}$ und 9.8 mit $-3 \underline{x}^{(22)}$ zusammen mit der Näherung 9.10, die wichtigen Gleichungen:

$$9.12$$

$$\begin{aligned} -\frac{3}{2} \underline{\psi}^{(44)} \cdot \left(\underline{a}^{(4)} \times \underline{h} \right)_\mu + \frac{3}{\sqrt{10}} \underline{\psi}^{(44)} \cdot \underline{b}_{\mu\nu}^{(2)} h_\nu + a_\mu^{(4)} &= -1 \underline{x}^{(44)} \cdot -1 \underline{\omega}^{(44)} \cdot a_\mu^{(4)} \\ -\frac{3}{\sqrt{10}} \underline{\psi}^{(44)} \cdot a_\mu^{(4)} h_\nu - \frac{5}{3} \underline{\psi}^{(44)} \cdot \underline{b}_{\mu\nu}^{(2)} h_\lambda \square_{\mu'\nu'\lambda'\mu\nu} + \sqrt{\frac{2}{3}} \underline{\psi}^{(44)} \cdot a_{\mu\nu\lambda}^{(2)} h_\lambda + b_{\mu\nu}^{(2)} &= 0 \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} \underline{\psi}^{(44)} \cdot \underline{b}_{\mu\nu}^{(2)} h_\lambda - 2 \underline{\psi}^{(44)} \cdot a_{\mu\nu\lambda}^{(2)} h_\kappa \square_{\mu'\nu'\lambda'\kappa\mu\nu\lambda} + a_{\mu\nu\lambda}^{(2)} &= 0. \end{aligned}$$

Darin ist für $(-1 \omega^{(41)} \cdot \underline{a}^{(1)})_i$ gemäß 9.4 der Ausdruck

$$\frac{\sqrt{3}}{C^{(4)}} -1 \omega_{i1}^{(41)} \underline{v}_{i2}$$

einzusetzen.

Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung als $O(\epsilon)$ heißt dabei, daß in 9.12 $\underline{v}_{12}$ allein durch

$$- D_{\text{iso}} \frac{n_o^2}{n_1^{(o)} n_2^{(o)}} \frac{\partial \gamma}{\partial \underline{x}}$$

ausgedrückt werden kann.

Die Gleichungen 9.12 sind dann von der gleichen Struktur, wie sie von S.Hess und L.Waldmann (7) zur Berechnung des S.B.E. der Wärmeleitfähigkeit eines reinen Gases aus Spinteilchen verwendet wurden. Die Auflösung von 9.12 nach $\underline{v}_{12}^{(4)}$ geht deshalb nach dem gleichen Verfahren vor sich, wie es von S.Hess u.L.Waldmann erfunden wurde. (L.Waldmann(1968)). In unserem Fall haben wir nur darauf zu achten, daß es sich bei $\underline{v}_{12}^{(4)}$ um eine 2×2 Matrix in den Sortenindizes handelt.

Der "Kagan-Vektor", gemäß 9.12 durch den Molenbruchgradienten ausgedrückt, wird schließlich in 9.5 eingesetzt und wir erhalten

$$9.13 \quad v_{12\mu} = - D_{\mu\nu} \frac{n_o^2}{n_1^{(o)} n_2^{(o)}} \frac{\partial \gamma}{\partial \underline{x}}$$

Der Diffusionskoeffizient des isotropen Falls ist somit beim Vorhandensein eines äußeren homogenen Magnetfeldes zu einem Tensor zweiter Stufe geworden.

$$9.14 \quad D_{\mu\nu} = D_{\perp} \left(\delta_{\mu\nu} + \frac{D_{\text{trans}}}{D_{\perp}} \epsilon_{\mu\lambda\nu} h_{\lambda} + \frac{D_{\parallel} - D_{\perp}}{D_{\perp}} h_{\mu} h_{\nu} \right)$$

Selbstverständlich hätte diese Abhängigkeit des Tensors $D_{\mu\nu}$ von $\underline{h}$, der Richtung des Magnetfeldes, sofort hingeschrieben werden können. Der bisherige Aufwand war jedoch nötig um den Zusammenhang der Diffusionskoeffizienten $D_{\parallel}$, $D_{\perp}$ und D_{trans} mit den Stoßklammern der Boltzmann-Gleichung herzustellen.

Die Diffusionskoeffizienten für die verschiedenen experimentellen Anordnungen, Molenbruchgradient parallel zum Magnetfeld: $D_{\parallel}$, Molenbruchgradient senkrecht zum Magnetfeld: $D_{\perp}$, und für den Transversaleffekt: D_{trans} , sind auf der nächsten Seite in 9.15 notiert. Es sei betont, daß wir noch beim allgemeinen Fall sind, wo beide Komponenten des Gemisches aus Spinteilchen bestehen. Deshalb nehmen die Ausdrücke gegenüber dem bekannten Fall des Lorentz-Gemisches eine etwas kompliziertere Gestalt an. (L.Waldmann u.H.D.Kupatt(1963), L.Waldmann(1968)).

Matrizen in den Nenner geschrieben heißt dabei, daß der Zähler mit der Inversen des Nenners zu multiplizieren ist. (Inverse bezüglich Sortenindizes). Da es sich um Funktionen einer einzigen Matrix handelt, kommt es auf die Reihenfolge der Multiplikation von Zähler mit der Inversen des Nenners nicht an.

9.15

$$D_1 = D_{iso} \left(1 + \frac{1}{\omega_{H1}^{(H)}} \left[\omega_{-1}^{(H)} \cdot \left(1 - \frac{3}{5} \frac{\varphi_{-1}^{(H)^2}}{1 + \varphi_{-1}^{(H)^2}} \right) \cdot x_{-1}^{(H)} \cdot \omega_{-1}^{(H)} \right] \right)$$

$$D_L = D_{iso} \left(1 + \frac{1}{\omega_{H1}^{(H)}} \left[\omega_{-1}^{(H)} \cdot \left(1 - \frac{3}{10} \frac{\varphi_{-1}^{(H)^2}}{1 + \varphi_{-1}^{(H)^2}} - \frac{3}{10} \frac{8 \varphi_{-1}^{(H)^2}}{1 + 4 \varphi_{-1}^{(H)^2}} \right) \cdot x_{-1}^{(H)} \cdot \omega_{-1}^{(H)} \right] \right)$$

$$D_{trans} = - \frac{3}{10} D_{iso} \frac{1}{\omega_{H1}^{(H)}} \left[\omega_{-1}^{(H)} \cdot \left(\frac{\varphi_{-1}^{(H)}}{1 + \varphi_{-1}^{(H)^2}} + \frac{4 \varphi_{-1}^{(H)}}{1 + 4 \varphi_{-1}^{(H)^2}} \right) \cdot x_{-1}^{(H)} \cdot \omega_{-1}^{(H)} \right]$$

In der Näherung der kleinen Nichtsphärizität können wir endgültig schreiben:

$$9.16 \quad \mathcal{D}_{uv} = \mathcal{D}_{\perp} \left(\delta_{uv} + \beta_{(1)} \varepsilon_{\mu\lambda\nu} h_{\lambda} + \beta_{(2)} h_{\mu} h_{\nu} \right)$$

$$\beta_{(1)} = \frac{\mathcal{D}_{\text{trans}}}{\mathcal{D}_{\text{iso}}} \quad \beta_{(2)} = \frac{\mathcal{D}_{\parallel} - \mathcal{D}_{\perp}}{\mathcal{D}_{\text{iso}}}$$

Diese Form des Diffusionstensors wird bei der hydrodynamischen Anwendung im Teil E die entscheidende Rolle spielen.

Die Symmetrie

$$D_{\mu\nu}(\underline{H}) = D_{\nu\mu}(-\underline{H})$$

liegt klar auf der Hand.

Nach bisherigen Überlegungen sind die $\beta_{(n)}$ $n = 1, 2$ und somit der S.B.E. der Diffusion von der Größenordnung $O(\varepsilon^2)$. Im Gegensatz zu den Messungen der Wärmeleitfähigkeit und der Viskosität, deren S.B.E. ebenfalls mit $O(\varepsilon^2)$ geht, hat man bei der Diffusion noch keine meßbare Beeinflussung durch ein äußeres Magnetfeld festgestellt. (H. Senftleben u. H. Schult (1950), H. F. Vugts, A. Tip, J. Los (1968)) Wir wollen unser allgemeines Ergebnis für diejenigen Messungen spezialisieren, wo der Spin der Teilchen der zweiten Komponente des Gemisches gegenüber dem Spin der Teilchen der ersten Komponente des Gemisches vernachlässigt werden kann. ($O_2 - N_2$, $NO - N_2$).

Für diesen Spezialfall ist $^{-1}\omega_{12}^{(14)} = 0$. Die Beziehung 9.5 schreibt sich damit:

$$9.17 \quad \underline{v}_{12} = -\mathcal{D}_{\text{iso}} \frac{n_2}{n_1^{(6)} n_2^{(6)}} \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{x}} - \frac{G}{\sqrt{3}} \frac{^{-1}\omega_{11}^{(14)}}{^{-1}\omega_{11}^{(11)}} \underline{a}_1$$

Es genügt somit die Gleichungen 9.6, 9.7 und 9.8 für $i = 1$ zu betrachten. Darin reduzieren sich dann die fettgedruckten Ausdrücke in der folgenden Weise:

$$\left(^{-1}\omega^{(14)} \cdot \underline{a}^{(1)} \right)_1 \equiv \sum_{j=1}^2 \text{^{-1}\omega}_{1j}^{(14)} \underline{a}_j^{(1)} = \text{^{-1}\omega}_{11}^{(14)} \underline{a}_1^{(1)}$$

$$\left(^{-2}\omega^{(22)} \cdot \underline{e}^{(2)} \right)_1 \equiv \sum_{j=1}^2 \text{^{-2}\omega}_{1j}^{(22)} \underline{e}_j^{(2)} = \text{^{-2}\omega}_{11}^{(22)} \underline{e}_1^{(2)}$$

$$\left(^{-3}\omega^{(22)} \cdot \underline{a}^{(2)} \right)_1 \equiv \sum_{j=1}^2 \text{^{-3}\omega}_{1j}^{(22)} \underline{a}_j^{(2)} = \text{^{-3}\omega}_{11}^{(22)} \underline{a}_1^{(2)}$$

Selbstverständlich ist

$$\left({}_{-1}\omega^{(4)} \cdot \underline{a}^{(1)} \right)_1 \equiv \sum_{j=1}^2 {}_{-1}\omega_{1j}^{(4)} \underline{a}_j^{(1)}$$

gemäß 9.4 durch

$$\frac{\sqrt{3}}{C^{(6)}} {}_{-1}\omega_{11}^{(4)} \underline{v}_{12}$$

zu ersetzen.

Zur Elimination von $\underline{a}_1^{(4)}$ aus 9.17 liegen dann Gleichungen vor, die von $\underline{v}_{12}$ abgesehen nur Größen mit Sortenindizes der ersten Komponente des Gemisches enthalten. Wir kommen somit mit nur einem Präzessionswinkels aus:

$$\varphi = \frac{\omega_{H1}}{{}_{-1}\omega_{11}^{(H)}} .$$

Mit den

$${}_{-1}A_{11}^{(kk')} = \frac{{}_{-1}\omega_{11}^{(kk')} {}_{-1}\omega_{11}^{(k'k)}}{{}_{-1}\omega_{11}^{(kk)} {}_{-1}\omega_{11}^{(k'k')}} .$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} 9.16a \quad \mathcal{D}_1 &= \mathcal{D}_{iso} \left(1 + {}_{-1}A_{11}^{(44)} \left(1 - \frac{3}{5} \frac{\varphi^2}{1 + \varphi^2} \right) \right) \\ \mathcal{D}_\perp &= \mathcal{D}_{iso} \left(1 + {}_{-1}A_{11}^{(44)} \left(1 - \frac{3}{10} \frac{\varphi^2}{1 + \varphi^2} - \frac{3}{10} \frac{8\varphi^2}{1 + 4\varphi^2} \right) \right) \\ \mathcal{D}_{trans} &= -\frac{3}{10} \mathcal{D}_{iso} {}_{-1}A_{11}^{(44)} \left(\frac{\varphi}{1 + \varphi^2} + \frac{4\varphi}{1 + 4\varphi^2} \right) . \end{aligned}$$

Für $H = 0$ wird $D_{\mu\nu}$ isotrop und geht in

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_{iso} \left(1 + {}_{-1}A_{11}^{(44)} \right)$$

über.

Der Korrekturterm $_{-1}A_{11}^{(14)}$ ist wegen der Onsagersymmetrie 9.1 und 4.6a positiv und wiederum von der Größenordnung $O(\epsilon^2)$. Würde man bei den Kopplungen des Diffusionsstromes mit spinabhängigen Größen noch den "Waldmann-Vektor" $\underline{a}_i^{(2)} \propto \langle \underline{c} \times \underline{s} \rangle_i$ berücksichtigen, so kämen zu 9.16a noch Terme mit $_{-1}A_{11}^{(12)}$ dazu. Wegen des verschiedenen Zeitumkehrverhaltens 7.9 von $\phi_i^{(1)}$ und $\phi_i^{(2)}$ ist jedoch $_{-1}A_{11}^{(12)} < 0$, so daß es zunächst den Anschein hat, daß das Fehlen des S.B.E. der Diffusion durch eine Kompensation der Einflüsse des "Waldmann-Vektors" mit denen des "Kagan-Vektors" zu erklären ist. Gemäß den Überlegungen von §8 wäre jedoch die Korrektur $_{-1}A_{11}^{(12)}$ von der Ordnung $O(\epsilon^n)$ $n \geq 4$, so daß diese Erklärung nicht in Frage kommt.

Bei den ersten Experimenten zum Senftlebeneffekt der Diffusion (H. Senftleben u. H. Schult (1950)) wurde ein $N_2 - O_2$ Gemisch verwendet, das zu 84% aus der paramagnetischen Komponente O_2 bestand. Bereits A. Tip, De Vries und L. Los (1966) bemerkten, daß der Magnetfeldeinfluß auf die Diffusionskonstante bei einem Gasgemisch mit einer nichtparamagnetischen Komponente und einer paramagnetischen Komponente proportional zur Konzentration der nichtparamagnetischen Komponente geht. Das erklärt warum Senftleben und Schult keinen meßbaren Einfluß des Magnetfeldes auf den Diffusionskoeffizienten wahrnehmen konnten. H. F. Vugts, A. Tip und J. Los (1968) untersuchten aus diesem Grunde den Senftlebeneffekt der Diffusion in Gasgemischen aus $O^{16}O^{18} - O_2^{16}$ und $NO - N_2$. Die erste Komponente lag dabei in geringer Konzentration vor. Auch bei diesen Experimenten war keine meßbare Beeinflussung der Diffusionskonstante durch das Magnetfeld festzustellen.

$$\left| \frac{\Delta D}{D} \right| < 2 \cdot 10^{-4}$$

Wir glauben, daß dieses Resultat auf den geringen Massenunterschied der Komponenten des Gasgemisches zurückzuführen ist.

Ein Ziel dieser Arbeit soll es sein, ein Experiment anzugeben, das direkt an den Senftleben-Beenakker-Korrekturen der Diffusion angreift. Wir werden dabei sehen, daß dieses Experiment untrennbar mit den S.B.E. der Viskosität verbunden ist. Deshalb wollen wir uns zunächst im folgenden Paragraphen der Viskosität eines binären Gasgemisches zuwenden.

§ 10 Reibungsdruck und Diffusionsdruck im binären Gasgemisch

Abweichend von den Näherungen, die zum Ausdruck für den Diffusionstensor geführt haben, behandeln wir die innere Reibung in 2. hydrodynamischer Näherung. Ohne äußeren Temperaturgradienten heißt das, daß wir eventuell auftretende zweite Ableitungen im Molenbruch und Geschwindigkeitsfeld berücksichtigen. Die in den T.R.G.'en für $Q_{iuv}^{(1)} = \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{1}{C_i^{(0)}} \langle \bar{C}_u \bar{C}_v \rangle_i$ auftretenden Gradienten (Seite 28)

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} Q_{i\alpha}^{(1)} \quad \frac{\partial}{\partial x_\alpha} Q_{iuv\alpha}^{(1)}$$

führen jedoch auf dritte Ableitungen im Geschwindigkeitsfeld und vierte Ableitungen im Molenbruch. Sie können deshalb in 2. hydrodynamischer Näherung außer Acht gelassen werden. ✓

Nach der zusammenfassenden Arbeit von Beenakker (1968) zeigen alle bisherigen Experimente über den S.B.E. der Viskosität eines reinen Gases mit Ausnahme des Sauerstoffs, daß es auf die Kopplung des Geschwindigkeitsfeldes mit Mittelwerten von Spingrößen der Struktur (Soninepolynom $\sqrt{s_\mu s_\nu}$) ankommt.

Nach § 8, im Rahmen unseres Entwicklungsschemas sind dann

$$n_i^{(0)} \omega_{ij}^{(15)} = n_j^{(0)} \omega_{ji}^{(51)}$$

die einzigen R.K. von der Ordnung $O(\epsilon)$. Im stationären Fall reduziert sich somit die T.R.G. von $a_{iuv}^{(1)}$ auf:

$$10.1 \quad \frac{2}{3} C_i^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} Q_{i\alpha}^{(1)} + \left(\omega_{ij}^{(10)} \cdot \underline{a}^{(1)} \right)_i + \left(\omega_{ij}^{(15)} \cdot \underline{a}^{(5)} \right)_i = 0$$

Multiplikation mit $\chi_{ij}^{(11)}$, der Inversen von $\omega_{ij}^{(11)}$, ergibt

$$\underline{a}_i^{(1)} = -\sqrt{\frac{2}{3}} \sum_j \chi_{ij}^{(11)} C_j^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} Q_{j\alpha}^{(1)} - \left(\chi_{ij}^{(10)} \cdot \omega_{ij}^{(15)} \cdot \underline{a}^{(5)} \right)_i$$

Der erste Term der rechten Seite kann leicht durch Gradienten des Geschwindigkeitsfeldes

$$\underline{v} = \frac{S_1 \langle \underline{c} \rangle_1 + S_2 \langle \underline{c} \rangle_2}{S}$$

und des Diffusionsfeldes $\underline{v}_{12} = \langle \underline{c} \rangle_1 - \langle \underline{c} \rangle_2$ ausgedrückt werden, wenn wir uns an die Bedeutung von

$$\underline{a}_j^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{3}} C_j^{(0)} \langle \underline{c} \rangle_j$$

erinnern.

$$\sqrt{3} \sum_{j=1}^2 x_{ij}^{(n)} c_j^{(n)} \frac{\partial \underline{q}_j^{(n)}}{\partial \underline{x}} = \sqrt{2} \left({}_{+2}x_{i1}^{(n)} + {}_{+2}x_{i2}^{(n)} \right) \frac{\partial \underline{v}}{\partial \underline{x}} + \sqrt{2} \frac{{}_{+2}x_{i1}^{(n)} - {}_{+2}x_{i2}^{(n)}}{\rho} \frac{\partial \underline{v}_{12}}{\partial \underline{x}}$$

Führt man für die nun immer auftretenden Kombinationen $({}_{+2}x_{i1}^{(n)} + {}_{+2}x_{i2}^{(n)})$ und $\frac{1}{\rho}({}_{+2}x_{i1}^{(n)} - {}_{+2}x_{i2}^{(n)})$ geeignete Abkürzungen ein

$$\sqrt{2} \left({}_{+2}x_{i1}^{(n)} + {}_{+2}x_{i2}^{(n)} \right) = \underline{L}_i^{(4)}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\rho} \left({}_{+2}x_{i1}^{(n)} - {}_{+2}x_{i2}^{(n)} \right) = \underline{\tilde{L}}_i^{(4)},$$

so erhalten wir mit den Vereinbarungen des vorigen Paragraphen:

$$10.2 \quad \underline{\underline{a}}^{(4)} = - \underline{L}^{(4)} \frac{\partial \underline{v}}{\partial \underline{x}} - \underline{\tilde{L}}^{(4)} \frac{\partial \underline{v}_{12}}{\partial \underline{x}} - {}_{+2}\underline{x}^{(n)} \cdot \omega^{(45)} \cdot \underline{\underline{a}}^{(5)}.$$

Der symmetrisch irreduzible Anteil des Drucktensors ergibt sich daraus nach 7.4 in einfacher Weise.

$$10.3 \quad \underline{\underline{p}} = \sqrt{2} k T_0 \quad \underline{n}^{(6)} \cdot \underline{\underline{a}}^{(4)}$$

Selbst für spinlose Teilchen, ${}_{+2} \omega_{ij}^{(15)} = 0$, setzt sich $\underline{\underline{p}}$ aus zwei Anteilen zusammen

$$10.4 \quad \underline{\underline{p}} = -2 \eta_{iso} \frac{\partial \underline{v}}{\partial \underline{x}} - 2 \tilde{\eta}_{iso} \frac{\partial \underline{v}_{12}}{\partial \underline{x}}$$

$$\eta_{iso} = \frac{1}{2} \sqrt{2} k T_0 \quad \underline{n}^{(6)} \cdot \underline{L}^{(4)} \quad \tilde{\eta}_{iso} = \frac{1}{2} \sqrt{2} k T_0 \quad \underline{n}^{(6)} \cdot \underline{\tilde{L}}^{(4)},$$

Der erste Term aus 10.4 ist der gewöhnliche Reibungsdruck, der durch den Gradienten des Feldes der mittleren Massengeschwindigkeit des Gasgemisches hervorgerufen wird. Der zweite Term, der Diffusionsdruck, ist eine typische Eigenschaft des Gemisches und führt auf zweite Ortsableitungen des Molenbruches und muß erst in 2. hydrodynamischer Näherung berücksichtigt werden.

Für den S.B.E. der Reibungsviskosität und der Diffusionsviskosität wird der letzte Term von 10.2 wichtig. Mit den Näherungen, die in diesem Paragraphen bereits auf 10.1 geführt haben, zusammen mit der Winkelmatrix

$${}_{+2} \varphi_{ij}^{(55)} = {}_{+2} x_{ij}^{(55)} \omega_{4j}$$

und

$$10.4 \quad a \quad H_{\mu\nu, \lambda^1 \nu^1} = 2 \square_{\mu\nu, \lambda^1, \mu^1 \nu^1} h_\lambda$$

schreibt sich die T.R.G. für $\underline{a}^{(5)} \triangleq \begin{pmatrix} \underline{a}_1^{(5)} \\ \underline{a}_2^{(5)} \\ \underline{a}_3^{(5)} \end{pmatrix}$

$$10.5 \quad \underline{a}^{(5)} + {}_{+2} \psi^{(55)} \cdot \underline{H} : \underline{a}^{(5)} = - {}_{+2} x^{(55)} \cdot {}_{+2} \omega^{(51)} \cdot \underline{a}^{(4)}.$$

Um eine Gleichung dieser Struktur nach $\underline{a}^{(5)}$ aufzulösen, machen wir folgenden Ansatz:

$$10.6 \quad \underline{a}^{(5)} = - \sum_{n=0}^4 F_{(n)} ({}_{+2} \psi^{(55)}) \cdot {}_{+2} x^{(55)} \cdot {}_{+2} \omega^{(51)} \cdot \underline{H}^n : \underline{a}^{(4)}.$$

Hierin, in der Näherung der kleinen Nichtsphärizität, ist dann $\underline{a}^{(1)}$ durch

$$- L^{(4)} \frac{\partial \underline{v}}{\partial \underline{x}} - \tilde{L}^{(4)} \frac{\partial \underline{v}_{12}}{\partial \underline{x}}$$

zu ersetzen. Mit den Potenzen von $H_{\mu\nu, \mu^1 \nu^1}$

$$10.7 \quad H_{\mu\nu, \mu^1 \nu^1}^{n+4} = H_{\mu\nu, \mu^1 \nu^1} H_{\mu^1 \nu^1, \mu^1 \nu^1}^n$$

und dem Einheitstensor im entsprechenden Raum

$$H_{\mu\nu, \mu^1 \nu^1}^0 = \triangle_{\mu\nu, \mu^1 \nu^1}$$

sind dann die Matrizenfunktionen $F_{(n)} ({}_{+2} \psi^{(55)})$ $n = 0, 1, 2, 3, 4$ einfach nach Einsetzen von 10.6 in 10.5 durch Koeffizientenvergleich zu ermitteln. Wichtig ist die Relation 10.8

$$10.8 \quad \underline{H}^5 = -4 \underline{H} - 5 \underline{H}^3,$$

die auch von Kagan (1962), Mc.Court und Snider (1967) durch explizites Ausrechnen erhalten wurde.

Für die Matrizenfunktionen $F_{(n)} ({}_{+2} \psi^{(55)})$ findet man nach diesem Verfahren die Ausdrücke 10.9. Dabei ist wieder zu beachten, daß Matrizenpolynome im Nenner so zu verstehen sind, daß der Zähler mit der Inversen des Nenners in Matrixmultiplikation bezüglich der Sortenindizes zu verknüpfen ist. Es handelt sich um Matrizenfunktionen einer Veränderlichen, so daß auf die Reihenfolge der Verknüpfung keine Rücksicht zu nehmen ist.

10.9

$$\cdot \quad \overline{F}_{(0)}(\varphi) = 1 \quad (1 \triangleq \delta_{ij})$$

$$\cdot \quad \overline{F}_{(1)}(\varphi) = - \frac{\varphi \cdot (1 + 5 \varphi^2)}{1 + 5 \varphi^2 + 4 \varphi^4}$$

$$\cdot \quad \overline{F}_{(2)}(\varphi) = \frac{\varphi^2 \cdot (1 + 5 \varphi^2)}{1 + 5 \varphi^2 + 4 \varphi^4}$$

$$\cdot \quad \overline{F}_{(3)}(\varphi) = - \frac{\varphi^3}{1 + 5 \varphi^2 + 4 \varphi^4}$$

$$\cdot \quad \overline{F}_{(4)}(\varphi) = \frac{\varphi^4}{1 + 5 \varphi^2 + 4 \varphi^4}$$

Für $H = 0$ gilt $\overline{F}_{(n)} = 0 \quad n = 1, 2, 3, 4$.

Damit setzen wir 10.6 in 10.2 ein und erhalten schließlich aus 10.3

$$10.10 \quad \underline{\underline{\overline{P}}} = -2 \eta : \underline{\underline{\frac{\partial \underline{v}}{\partial x}}} - 2 \underline{\underline{\tilde{\eta}}} : \underline{\underline{\frac{\partial \underline{v}}{\partial x}}}.$$

Die Viskositätstensoren schreiben wir dabei in einer Gestalt auf, wie sie für

die hydrodynamischen Anwendungen dieser Überlegungen besonders vorteilhaft ist.

$$10.11 \quad \eta = \eta \left(\underline{A} + \sum_{n=1}^4 \frac{1}{2} \delta_{(n)} \underline{H}^n \right) \quad \tilde{\eta} = \tilde{\eta} \left(\underline{A} + \sum_{n=1}^4 \frac{1}{2} \tilde{\delta}_{(n)} \underline{H}^n \right)$$

$$\delta_{(n)} = 2 \frac{n^{(d)} \cdot x^{(n)} \cdot \omega^{(45)} \cdot \overline{F}_{(n)} \left(\begin{smallmatrix} (55) \\ (1) \end{smallmatrix} \right) \cdot x^{(55)} \cdot \omega^{(51)} \cdot L^{(1)}}{n^{(a)} \cdot L^{(1)}}$$

$$\tilde{\delta}_{(n)} = 2 \frac{n^{(a)} \cdot x^{(n)} \cdot \omega^{(45)} \cdot \overline{F}_{(n)} \left(\begin{smallmatrix} (55) \\ (1) \end{smallmatrix} \right) \cdot x^{(55)} \cdot \omega^{(51)} \cdot \tilde{L}^{(1)}}{n^{(a)} \cdot \tilde{L}^{(1)}}$$

Die Viskositäten η und $\tilde{\eta}$ sind die eines Gasgemisches aus Spinteilchen ohne äußeres Magnetfeld.

$$\eta = \eta_{iso} \left(1 + \frac{n^{(a)} \cdot x^{(n)} \cdot \omega^{(45)} \cdot x^{(55)} \cdot \omega^{(51)} \cdot L^{(1)}}{n^{(a)} \cdot L^{(1)}} \right)$$

$$\tilde{\eta} = \tilde{\eta}_{iso} \left(1 + \frac{n^{(a)} \cdot x^{(n)} \cdot \omega^{(45)} \cdot x^{(55)} \cdot \omega^{(51)} \cdot \tilde{L}^{(1)}}{n^{(a)} \cdot \tilde{L}^{(1)}} \right)$$

Die Korrekturen $\delta_{(n)}$, $\tilde{\delta}_{(n)}$ die durch das Magnetfeld auftreten sind von der Größenordnung $O(\epsilon^2)$. Das wird später bei der hydrodynamischen Anwendung von 10.11 eine Störungsrechnung zulassen. Aus 10.4a und 5.8 folgt:

$$H_{\mu\nu, \mu' \nu'} = - H_{\mu' \nu', \mu \nu}$$

Aus der Definition 10.7 sieht man dann sofort

$$10.12 \quad H_{\mu\nu, \mu' \nu'}^n(\underline{H}) = (-1)^n H_{\mu' \nu', \mu \nu}^n(\underline{H}) = H_{\mu' \nu', \mu \nu}^n(-\underline{H}),$$

was zu der bekannten Symmetrierelation des Viskositätstensors führt:

$$\eta_{\mu\nu, \mu' \nu'}(\underline{H}) = \eta_{\mu' \nu', \mu \nu}(-\underline{H})$$

Analoges gilt für $\tilde{\eta}_{\mu\nu, \mu' \nu'}$.

Für ein binäres Gemisch, bei dem nur die Teilchen der Sorte 1 einen Spin besitzen, gehen die Matrizenfunktionen $F_{(n)}^{(55)}(\varphi)$ in gewöhnliche Funktionen $F_{(n)}(\varphi)$ des Drehwinkels

$$\varphi = \frac{\omega_{H1}}{\omega_{A1}}$$

über und die Viskositäten nehmen ein vertrautere Gestalt an :

$$\begin{aligned} \underline{\eta} &= \eta_{iso} \left[\left(1 + {}_{+2}A^{(45)} \right) \underline{\Delta} + {}_{+2}A^{(45)} \sum_{n=1}^4 F_{(n)}(\varphi) \underline{H}^n \right] & {}_{+2}A^{(45)} &= \frac{\left(\mathbf{R}^{(5)} \cdot \mathbf{x}^{(5)} \cdot \omega^{(5)} \right)_4 \left(\omega^{(5)} \cdot \mathbf{L}^{(1)} \right)_4}{\omega_{+2}^{(55)} \cdot \mathbf{L}^{(1)} \cdot \mathbf{R}^{(5)}} \\ \tilde{\underline{\eta}} &= \tilde{\eta}_{iso} \left[\left(1 + {}_{+2}\tilde{A}^{(45)} \right) \underline{\Delta} + {}_{+2}\tilde{A}^{(45)} \sum_{n=1}^4 \tilde{F}_{(n)}(\varphi) \underline{H}^n \right] & {}_{+2}\tilde{A}^{(45)} &= \frac{\left(\mathbf{h}^{(5)} \cdot \mathbf{x}^{(5)} \cdot \omega^{(5)} \right)_4 \left(\omega^{(5)} \cdot \tilde{\mathbf{L}}^{(1)} \right)_4}{\omega_{+2}^{(55)} \cdot \tilde{\mathbf{L}}^{(1)} \cdot \mathbf{h}^{(5)}} \end{aligned}$$

Um den Zusammenhang der $\delta_{(n)}$ $n = 1, 2, 3, 4$ mit dem Experiment zu sehen, bringen wir 10.11 auf eine etwas andere Form

$$10.13 \quad \underline{\eta} = \sum_{n=0}^4 \eta_{(n)} \underline{H}^n \quad \left(\text{Analoges für } \tilde{\underline{\eta}} \right)$$

mit

$$\eta_{(0)} = \eta \quad \eta_{(n)} = \frac{1}{2} \eta_{iso} \delta_{(n)} \quad n = 1, 2, 3, 4$$

und verweisen auf die Tabelle im Anhang, wo eine Zusammenstellung aller gebräuchlichen Viskositätskoeffizienten und der Zusammenhang mit den experimentellen Anordnungen gegeben ist. Zur vorläufigen Orientierung sei folgende Zusammenstellung gegeben. $\underline{h} = (1, 0, 0)$

$\frac{-2^{(55)}}{\omega \mathbf{x}}$	$\mathbf{x} \times$	$\mathbf{x} \mathbf{y}$	$\mathbf{x} \mathbf{z}$	$\mathbf{y} \mathbf{y}$	$\mathbf{y} \mathbf{z}$	$\mathbf{z} \mathbf{z}$
$\mathbf{x} \times$	$\eta_{(0)}$	0	0	0	0	0
$\mathbf{x} \mathbf{y}$	0	$\eta_{(2)} - \eta_{(4)} + \eta_{(4)}$	$\eta_{(3)} - \eta_{(1)}$	0	0	0
$\mathbf{x} \mathbf{z}$	0	$\eta_{(1)} - \eta_{(3)}$	$\eta_{(0)} - \eta_{(2)} + \eta_{(4)}$	0	0	0
$\mathbf{y} \mathbf{y}$	0	0	0	$\eta_{(0)} - 2\eta_{(2)} + 8\eta_{(4)}$	$4\eta_{(3)} - \eta_{(1)}$	$2\eta_{(2)} - 8\eta_{(4)}$
$\mathbf{y} \mathbf{z}$	0	0	0	$\eta_{(1)} - 4\eta_{(3)}$	$\eta_{(0)} - 4\eta_{(2)} + 16\eta_{(4)}$	$4\eta_{(3)} - \eta_{(1)}$
$\mathbf{z} \mathbf{z}$	0	0	0	$2\eta_{(2)} - 8\eta_{(4)}$	$\eta_{(1)} - 4\eta_{(3)}$	$\eta_{(0)} - 2\eta_{(2)} + 8\eta_{(4)}$

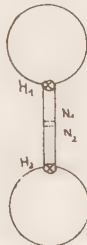
Teil E

Hydrodynamische Anwendung

§ 11 Einleitende Bemerkungen zur Diffusiophorese

Nach Schmitt und Waldmann (1960) erfahren Aerosolteilchen in einem diffundierenden Gasgemisch eine Kraft, die sie ohne äußeres Magnetfeld in Richtung des Diffusionsstromes der schweren Moleküle bewegt. Die Versuchsanordnung zeigt Abb. 1 im ganz groben Schema. Zwei Vorratsgefäße sind durch ein Glasrohr verbunden, in welchem sich der Diffusionsprozeß abspielt und in dessen Mitte sich die Aerosolteilchen befinden, deren vertikale Geschwindigkeiten gemessen werden können.

Abb. 1



Leichte Komponente des Gemisches

Schwere Komponente des Gemisches

Bei Aerosolteilchen, die groß gegenüber der freien Weglänge sind, kommt diese Bewegung durch Diffusionsgleitung zustande.

Zur theoretischen Klärung dieses Effektes haben Schmitt und Waldmann (1960) für die mittlere Teilchengeschwindigkeit $\underline{w}$ des Gemisches

$$11.1 \quad \underline{w} = \frac{n_1 \langle \underline{c} \rangle_1 + n_2 \langle \underline{c} \rangle_2}{n}$$

an der Oberfläche einer ruhenden Kugel mit Radius R in einem isothermen binären Gasgemisch folgenden Ansatz gemacht:

$$11.2 \quad \underline{w} = G^{(w)} D \frac{\partial \chi^{(s)}}{\partial x} \quad \text{Oberfläche der Kugel}$$

mit

$$11.3 \quad \left(\frac{\partial \chi^{(s)}}{\partial x} \right)^{\text{normal}} = 0 \quad \text{Oberfläche der Kugel}$$

Für den Fall ohne Magnetfeld werden alle Größen mit einer tief gestellten, eingeklammerten Null versehen.

Die Gleitkonstante $\sigma^{(w)}$ ist dabei ein empirischer Faktor und hängt von der Natur der Oberfläche und derjenigen des Gasgemisches ab. Mit dem Ansatz 11.2 zusammen mit 11.3 ergibt sich dann aus den hydrodynamischen Gleichungen im isotropen Fall

$$11.4 \quad \Delta \chi_{(e)} = 0 \quad \eta \Delta v_{(e)} = \text{grad } P_{(e)} \quad \text{div } v_{(e)} = 0$$

und den bekannten Randbedingungen weit weg von der Kugel

$$\underline{w}^{\infty} = 0 \quad \left(\frac{\partial \chi_{(e)}}{\partial x} \right)^{\infty} = \text{const} \quad ,$$

die Kraft auf eine ruhende Kugel im Diffusionsfeld eines binären, isothermen Gasgemisches. (Schmitt u. Waldmann (1960))

$$\underline{K}_d = - 6\pi R \eta \sigma^{(w)} D \left(\frac{\partial \chi_{(e)}}{\partial x} \right)^{\infty}$$

Unter dem Einfluß dieser Kraft und der Reibung bewegt sich dann ein freies Aerosolteilchen mit der Geschwindigkeit

$$v_d = - \sigma^{(w)} D \left(\frac{\partial \chi_{(e)}}{\partial x} \right)^{\infty} \quad ,$$

welche in einer Versuchsanordnung von Schmitt und Waldmann gemessen werden kann.

Wir wollen nun überlegen, wie diese Erscheinung, Diffusiophorese genannt, verwendet werden könnte, um den Einfluß des Magnetfeldes auf die Diffusion und die Viskosität zu messen. Der Diffusionstensor 9.16 enthält nur bei $H \neq 0$ einen Transversalterm, der bewirkt, daß sich der Konzentrationsgradient schräg zum Diffusionsstrom einstellt. Bei der Diffusion durch ein Glasrohr in einer Anordnung analog Abb. 1, bei einem Magnetfeld senkrecht zum Diffusionsstrom, sollte eine Transversalbewegung der Aerosolteilchen zustande kommen, die sowohl senkrecht zum Magnetfeld als auch senkrecht zum Diffusionsstrom und damit quer zur Röhrenachse verläuft.

Eine Methode zur Messung dieser kleinen Transversalkomponente soll in einem späteren Paragraphen vorgeschlagen werden. Zunächst wollen wir uns aber die hydrodynamischen Probleme für den anisotropen Fall ansehen.

§ 12 Stationäres Diffusionsproblem um eine Kugel im homogenem Magnetfeld

Bei einer Versuchsanordnung, die im Prinzip nach Abb. 1 aufgebaut ist, wo die Vorratsgefäße groß gegen das Volumen des Glasrohres sind, liegt ein quasi-stationäres Diffusionsproblem vor. In diesem Fall liefern die linearen Kontinuitätsgleichungen 7.1 die Divergenzfreiheit der mittleren Geschwindigkeit $\langle \underline{c} \rangle_i$ für jede Komponente des Gemisches, $i = 1, 2$, und damit

$$12.1 \quad \text{div } \underline{v}_{12} = 0$$

Aus dem phänomenologischen Zusammenhang von Diffusionsgeschwindigkeit und Molenbruchgradienten gemäß 9.13, zusammen mit dem Diffusionstensor der Form 9.16 erhalten wir die Differentialgleichung der Diffusion im anisotropen Fall

$$12.2 \quad \Delta \gamma + \beta_{(2)} h_{\mu} h_{\nu} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_{\mu} \partial x_{\nu}} = 0 \quad \checkmark$$

Die Randbedingungen dazu werden durch die Gefäßwände und durch eine sich im Diffusionsfeld befindenden Kugel vom Radius R festgelegt.

Bei einer Versuchsanordnung der Abb. 1 ist das Diffusionsfeld $\underline{v}_{12}^{\infty}$, weit weg von der Kugel homogen und hat die Richtung der Glasrohrachse. Der dazu gehörige Molenbruchgradient ergibt sich durch Auflösen von 9.13, wenn man beachtet, daß die ganze Theorie nur bis zu linearen Gliedern in den Senftleben - Beenakker - Korrekturen $\beta_{(n)}$ $n = 1, 2$ exakt ist

$$12.3 \quad \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x_{\nu}} \right)^{\infty} = g_{\nu} - \beta_{(1)} \varepsilon_{\nu \lambda \vartheta} h_{\lambda} g_{\vartheta} - \beta_{(2)} h_{\nu} h_{\vartheta} g_{\vartheta}$$

Der vorgegebene konstante Vektor $\underline{g}$ ist im wesentlichen die Diffusionsgeschwindigkeit im Unendlichen.

$$12.4 \quad \underline{g} = - \frac{1}{D_{\perp}} \frac{h_1^{(0)} h_2^{(0)}}{h_3^{(0)}} \underline{v}_n^{\infty}$$

Die Randbedingung am Hindernis formuliert sich aus der Undurchlässigkeit der Kugeloberfläche für jede Gaskomponente

$$12.5 \quad \langle \underline{c} \rangle_i^{\text{normal}} = 0 \quad \text{Oberfläche der Kugel}$$

und damit aus

$$\underline{v}_n^{\text{normal}} = 0 \quad \text{Oberfläche der Kugel}$$

zusammen mit 9.13 und 9.16 zu

$$12.6 \quad \left(\frac{\partial \chi}{\partial \underline{x}} + \beta_{(1)} \underline{h} \times \frac{\partial \chi}{\partial \underline{x}} + \beta_{(2)} \underline{h} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial \underline{x}} \right)_{\mathcal{R}}^{\text{normal}} = 0.$$

Für alle Rechnungen ist es günstig den Ursprung des Koordinatensystems mit dem Mittelpunkt der Kugel zusammenfallen zu lassen. Den Ortsvektor zerlegen wir dabei gelegentlich in Betrag und Richtung

$$\underline{x} = r \hat{\underline{x}}.$$

Ausdrücke mit Index $\mathcal{R}$ sind an der Stelle $r = R$ zu nehmen.

Die Größenordnung der Senftleben - Beenakker - Korrekturen $\beta_{(n)}$ erlaubt nun eine Störungsrechnung nach Potenzen von $\beta_{(n)}$. Uns interessieren jedoch nur die in $\beta_{(n)}$ linearen Korrekturen zu $\chi_{(0)}$, der Lösung unseres Diffusionsproblems mit Magnetfeld Null. Der Ansatz

$$12.7 \quad \chi = \chi_{(0)} + \beta_{(1)} \chi_{(1)} + \beta_{(2)} \chi_{(2)}$$

liegt auf der Hand. Er führt von 12.2, 12.3 und 12.6 zu einfachen Gleichungen und den entsprechenden Randbedingungen für $\chi_{(0)}$, $\chi_{(1)}$, und $\chi_{(2)}$.

12.8

$\Delta \chi_{(0)} = 0$	$\Delta \chi_{(1)} = 0$	$\Delta \chi_{(2)} + h_{\mu} h_{\nu} \frac{\partial^2 \chi_{(2)}}{\partial x_{\mu} \partial x_{\nu}} = 0$
$\left(\frac{\partial \chi_{(0)}}{\partial \underline{x}} \right)^{\infty} = \underline{g}$	$\left(\frac{\partial \chi_{(1)}}{\partial \underline{x}} \right)^{\infty} = -\underline{h} \times \underline{g}$	$\left(\frac{\partial \chi_{(2)}}{\partial \underline{x}} \right)^{\infty} = -\underline{h} \cdot \underline{g}$
$\left(\frac{\partial \chi_{(0)}}{\partial \underline{x}} \right)_{\mathcal{R}}^{\text{normal}} = 0$	$\left(\frac{\partial \chi_{(1)}}{\partial \underline{x}} + \underline{h} \times \frac{\partial \chi_{(1)}}{\partial \underline{x}} \right)_{\mathcal{R}}^{\text{normal}} = 0$	$\left(\frac{\partial \chi_{(2)}}{\partial \underline{x}} + \underline{h} \cdot \frac{\partial \chi_{(2)}}{\partial \underline{x}} \right)_{\mathcal{R}}^{\text{normal}} = 0$

Für die Lösung jeder einzelnen Gleichung bastle man sich eine Linearkombination aller möglichen Skalare, die man aus den Vektoren $\underline{g}$ und $\underline{h}$ und den Multipolpotentialen

$$12.9 \quad \Phi_{\mu_1 \dots \mu_e} = (-1)^e \frac{\partial^e r^{-1}}{\partial x_{\mu_1} \dots \partial x_{\mu_e}} \quad /$$

aufbauen kann.

Die Koeffizienten vor den einzelnen Kombinationen aus $\underline{g}$, $\underline{h}$ und den Multipolpotentialen sind dann nur radialabhängig und bestimmen sich aus den Differentialgleichungen und den Randbedingungen 12.8. Obwohl bei der experimentellen Anwendung nur der Transversaleffekt interessiert, wollen wir das komplette Ergebnis aufschreiben.

Für die Rechnungen wurde stark die Formelsammlung von S. Hess (1967) ausgenutzt mit dem Ergebnis:

$$\gamma_{(0)} = x_{\tau} g_{\tau} + \frac{R^3}{2} \phi_{\tau} g_{\tau}$$

$$12.10 \quad \gamma_{(1)} = \frac{R^3}{4} \phi_g \varepsilon_{g\lambda\tau} h_{\lambda} g_{\tau} - x_g \varepsilon_{g\lambda\tau} h_{\lambda} g_{\tau}$$

$$\gamma_{(2)} = \frac{R^3}{20} (r^2 - R^2) h_g h_{\lambda} g_{\tau} \phi_{g\lambda\tau} - \frac{3R^3}{20} \phi_{\tau} g_{\tau} - \frac{R^3}{20} h_g h_{\tau} \phi_g g_{\tau} - x_g h_g h_{\tau} g_{\tau}.$$

Da sich die Kraft auf eine Kugel gemäß

$$12.11 \quad K_{\mu} = - \int_{\text{Kugelfläche}} p_{\mu\nu} \hat{x}_{\nu} d\sigma$$

ergibt, sieht man bereits am Ergebnis 12.10, daß der Diffusionsdruck in 10.10 keinen direkten Beitrag zur Kraft auf ein Aerosolteilchen im Diffusionsfeld liefert. Um dieses wichtige Resultat einzusehen, schreiben wir uns mit 9.13 den direkten Beitrag des Diffusionsdruckes aus 10.10 zur Kraft 12.11 etwas ausführlicher auf:

$$12.12 \quad -K_{\mu}^D \text{ (direkter Beitrag vom Diffusionsdruck)} = 2 \tilde{\eta}_{\mu\nu, \mu' \nu'} D_{\mu' \nu'} \left(\frac{n_s^2}{n_i^{(s)} n_i^{(i)}} \right) \hat{x}_{\nu} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_{\nu} \partial x_{\nu'}} d\sigma.$$

Nach 12.7 gilt: $\gamma = \gamma_{(0)} + \beta_{(1)} \gamma_{(1)} + \beta_{(2)} \gamma_{(2)}$. Aus den zweiten Ableitungen von 12.10

$$\frac{\partial^2 \gamma_{(0)}}{\partial x_{\nu} \partial x_{\nu'}} = \frac{R^3}{2} \phi_{\nu' \nu} g_{\tau} \quad \frac{\partial^2 \gamma_{(1)}}{\partial x_{\nu} \partial x_{\nu'}} = \frac{R^3}{4} \phi_{\nu' \nu} \varepsilon_{g\lambda\tau} h_{\lambda} g_{\tau}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \gamma_{(2)}}{\partial x_{\nu} \partial x_{\nu'}} = & \frac{R^3}{20} \left[\left(\frac{5}{9} r^2 - R^2 \right) \phi_{\nu' \nu} \varepsilon_{g\lambda\tau} h_{\lambda} h_{\tau} g_{\tau} - \frac{40}{9} \Delta_{\nu' \nu \lambda \tau} \varepsilon_{\alpha \beta \gamma} \phi_{\alpha \beta \gamma} h_{\lambda} h_{\tau} g_{\tau} - 3 \phi_{\nu' \nu} g_{\tau} \right. \\ & \left. - \frac{30}{7} \Delta_{g\lambda\tau, \nu' \alpha \beta} \phi_{\nu' \alpha \beta} h_{\lambda} h_{\tau} g_{\tau} - h_{\lambda} h_{\tau} \phi_{\nu' \nu} g_{\tau} \right] \end{aligned}$$

ersehen wir sofort, daß das Oberflächenintegral in 12.12 verschwindet, wenn wir beachten, daß

$$\int \hat{x}_{\nu} \phi_{\mu_1 \dots \mu_\ell} d\sigma = 0 \quad \text{für } \ell \neq 1.$$

§ 13 Der Einfluß eines äußeren homogenen Magnetfeldes auf das

stationäre Gleitströmungsproblem um eine ruhende Kugel

1. Navier - Stokes - Gleichungen mit Magnetfeld

Die Kraft auf kugelförmige Aerosolteilchen ergibt sich aus 12.11

$$K_{\mu} = - \int_{\text{Kugelfläche}} p_{\mu\nu} x_{\nu} d\sigma$$

wenn man den Drucktensor an der Kugeloberfläche kennt. Da der Diffusionsdruck nach den Überlegungen und Ergebnissen des vorigen Paragraphen keinen direkten Beitrag zur Kraft liefert, können wir uns für diese Betrachtungen mit der ersten hydrodynamischen Näherung begnügen, bei der der Drucktensor nur den gewöhnlichen Reibungsanteil enthält:

$$13.1 \quad p_{\mu\nu} = -2 \eta_{\mu\nu, \lambda\lambda} \frac{\partial v_{\lambda}}{\partial x_{\nu}} + p \delta_{\mu\nu}$$

Den Viskositätstensor verwenden wir in der für diesen Paragraphen zurechtgestellten Form 10.11

$$\eta_{\mu\nu, \lambda\lambda} = \eta \left(\Delta_{\mu\nu, \lambda\lambda} + \sum_{n=1}^4 \frac{1}{2} \delta_{(n)} H_{\mu\nu, \lambda\lambda}^{(n)} \right)$$

Aus 7.5 ergeben sich damit im stationären Fall

$$\frac{\partial}{\partial x_{\nu}} p_{\mu\nu} = 0$$

zusammen mit der Divergenzfreiheit der mittleren Massengeschwindigkeit

$$13.2 \quad \text{div } \underline{v} = 0$$

die anisotropen Navier - Stokes - Gleichungen eines neutralen Gases aus Spinteilchen im homogenen magnetischen Feld.

$$13.3 \quad \Delta v_{\mu} + \sum_{n=1}^4 \delta_{(n)} H_{\mu\nu, \lambda\lambda}^{(n)} \frac{\partial^2 v_{\lambda}}{\partial x_{\nu} \partial x_{\nu}} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x_{\mu}}$$

2. Randbedingungen weit weg von der Kugel

Bei einer Versuchsanordnung eines Prinzipes nach Abb.1 ,Seite 49, werden sich nach Öffnen der Hähne H_1 und H_2 die Drucke der beiden Vorratsbehälter schnell ausgleichen, so daß dann mit genügender Genauigkeit weit weg von dem sich in der Mitte des Glasrohres befindenden Aerosolteilchens die mittlere Teilchengeschwindigkeit des Gasgemisches $\underline{v}$ Null gesetzt werden kann. Aus dem exakten Zusammenhang von mittlerer Massengeschwindigkeit, mittlerer Teilchengeschwindigkeit und Diffusionsgeschwindigkeit des Gasgemisches

$$13.4 \quad \underline{v} = \underline{v} + \frac{m_1 - m_2}{m} \frac{n_1^{(o)} n_2^{(o)}}{n_o^2} \underline{v}_{12}$$

folgt daraus mit der mittleren Molekülmasse $m = \rho / n$ und der Abkürzung 12.4 die Randbedingung im Unendlichen:

$$13.5 \quad \underline{v}^\infty = - \frac{m_1 - m_2}{m} D \underline{g} = \frac{m_1 - m_2}{m} \frac{n_1^{(o)} n_2^{(o)}}{n_o^2} \underline{v}_{12}^\infty .$$

3. Gleitrandbedingung an der Kugeloberfläche

Wie in § 11 beschrieben, haben Schmitt und Waldmann (1960) die diffusio-phoretische Kraft im isotropen Fall mit einer Gleitrandbedingung der Form 11.2 ausgerechnet. Mit dem Zusammenhang 13.4 läßt sich dann 11.2 schreiben:

$$13.6 \quad \underline{v} = \sigma^{(v)} D \frac{\partial \gamma^{(o)}}{\partial x} \quad (\text{Magnetfeld Null: } D_{\mu\nu} = D \delta_{\mu\nu} .)$$

Die Gleitkonstante $\sigma^{(v)}$ ist dabei bereits durch $\sigma^{(w)}$ festgelegt:

$$13.7 \quad \sigma^{(v)} = \sigma^{(w)} - \frac{m_1 - m_2}{m} .$$

Im anisotropen Fall haben Molenbruchgradient und Diffusionsstrom nicht mehr die gleiche Richtung, so daß die Gleitrandbedingung in entsprechender Weise abgeändert werden muß:

$$13.8 \quad \underline{v}_R = (\underline{G}^{(v)} D \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial x})_R .$$

Der Gleitkonstantentensor enthält Beiträge aus dem Gasinneren und der Oberfläche der Kugel. Wir wollen ihn in folgender Form schreiben:

$$13.9 \quad \zeta_{\mu\nu}^{(v)} = \zeta^{(v)} \left(\delta_{\mu\nu} + \zeta_R \beta_{(1)} \varepsilon_{\mu\lambda\nu} h_\lambda + \zeta_S \beta_{(2)} h_\mu h_\nu \right) .$$

Für $\zeta_A = \zeta_S = 1$ wird $D \zeta_{\mu\nu}^{(v)} = D_{\mu\nu} \zeta^{(v)} .$

Die neu hinzukommenden Gleitkonstanten, G_{μ} für den antisymmetrischen Teil, G_s für den symmetrischen Teil, sind wiederum empirische Faktoren. Die Randbedingung 13.8 enthält automatisch

$$\underline{v}_R^{\text{Normal}} = 0 ,$$

wie es die Undurchlässigkeit der Kugeloberfläche fordert.

4. Der Übergang zum Stokes - Problem mit Magnetfeld mit Hafttrandbedingung

Mit dem Ansatz 12.7 wollen wir der besseren Übersicht halber nochmals die entscheidenden Differentialgleichungen mit den Randbedingungen zusammenstellen.

$$\Delta v_{\mu} + \sum_{n=1}^4 \delta_{(n)} H_{\mu\nu, \mu'\nu'}^n \frac{\partial^2 v_{\mu'}}{\partial x_{\nu} \partial x_{\nu'}} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial P}{\partial x_{\mu}}$$

$$\text{div } \underline{v} = 0 \quad \text{und damit} \quad \frac{1}{\eta} \Delta P = \sum \delta_{(n)} H_{\mu\nu, \mu'\nu'}^n \frac{\partial^3 v_{\mu'}}{\partial x_{\mu} \partial x_{\nu} \partial x_{\nu'}}$$

$$v_{\mu}^{\infty} = - \frac{m_1 - m_2}{m} D g_{\mu}$$

$$\underline{v}_R = G^{(v)} D \left(\frac{\partial \delta_{(n)}}{\partial x} + \beta_{(n)} \left(\frac{\partial \delta_{(n)}}{\partial x} + G_{\mu} h \times \frac{\partial \delta_{(n)}}{\partial x} \right) + \beta_{(n)} \left(\frac{\partial \delta_{(n)}}{\partial x} + G_s h \cdot \frac{\partial \delta_{(n)}}{\partial x} \right) \right)_{\text{tang.}}$$

Der formale Übergang zum Stokes - Problem mit Hafttrandbedingung mit Magnetfeld, bei dem die Kugel sich in einem homogenen Gasgemisch mit einer Geschwindigkeit $\underline{v}^{\text{Kugel}}$ bewegt, geschieht einfach dadurch, daß in den Endlösungen folgende Ersetzungen durchgeführt werden :

$$G^{(v)} = 0 \quad \frac{m_1 - m_2}{m} D g = \underline{v}^{\text{Kugel}}$$

5. Lösung des Gleitströmungsproblems

Wiederum machen wir von der Tatsache Gebrauch, daß die Senftleben - Beenakker - Korrekturen $\beta_{(n)} \delta_{(n)}$ zur Viskosität und Diffusion von der Größenordnung $O(\epsilon^2)$ sind.

Wir treiben mit den Ansätzen 13.11 Störungsrechnung bis zu linearen Gliedern in $\beta_{(n)}$ und $\delta_{(n)}$.

$$13.11 \quad \underline{v} = v_{(0)} + \sum_{n=1}^4 \delta_{(n)} v_{(n)} + \sum_{n=1}^2 \beta_{(n)} \tilde{v}_{(n)}$$

$$P = P_{(0)} + \sum_{n=1}^4 \delta_{(n)} P_{(n)} + \sum_{n=1}^2 \beta_{(n)} \tilde{P}_{(n)}$$

Die Korrekturen zu den bekannten isotropen Lösungen $v_{(0)}$ und $P_{(0)}$ ergeben sich damit aus folgenden Differentialgleichungen:

$$\Delta v_{(0)\mu} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial x_\mu} P_{(0)}$$

$$\underline{v}_{(0)}^\sigma = - \frac{m_1 - m_2}{m} \underline{D} \underline{g}$$

$$\text{div } \underline{v}_{(0)} = 0 \quad \text{und damit } \Delta P_{(0)} = 0$$

$$\underline{v}_{(0)R} = \sigma^{(r)} \underline{D} \left(\frac{\partial \delta_{(0)}}{\partial x} \right)^{\text{tang}}$$

$$\boxed{n = 1, 2, 3, 4}$$

$$\Delta v_{(n)\mu} + H_{\mu\nu, \mu'\nu'}^n \frac{\partial^2 v_{(n)\mu'}}{\partial x_\nu \partial x_{\nu'}} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial x_\mu} P_{(n)}$$

$$\text{div } \underline{v}_{(n)} = \sigma \quad \text{und damit} \quad \Delta P_{(n)} = \eta H_{\mu\nu, \mu'\nu'}^n \frac{\partial^3 v_{(n)\mu'}}{\partial x_\mu \partial x_\nu \partial x_{\nu'}}$$

$$\underline{v}_{(n)}^\sigma = 0$$

$$\underline{v}_{(n)R} = \sigma$$

$$\boxed{n = 1, 2}$$

$$\Delta \tilde{v}_{(n)} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial \tilde{P}_{(n)}}{\partial x}$$

$$\sigma_{(n)} = \sigma_R \quad \sigma_{(2)} = \sigma_S$$

$$P_{(n)\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\lambda\lambda}$$

$$\text{div } \tilde{v}_{(n)} = \sigma \quad \text{und damit} \quad \Delta \tilde{P}_{(n)} = 0$$

$$P_{(2)\mu\nu} = h_{\mu\nu}$$

$$\tilde{v}_{(n)\mu R} = \sigma^{(r)} \underline{D} \left(\frac{\partial \delta_{(n)}}{\partial x_\mu} + \sigma_{(n)} P_{(n)\mu\nu} \frac{\partial \delta_{(n)}}{\partial x_\nu} \right)^{\text{tang}}$$

$$\underline{\tilde{v}}_{(n)}^\sigma = \sigma$$

Sie sind durch geeignete Linearkombinationen aus Zusammensetzungen von $\underline{g}$, Magnetfeldtensoren und Multipolpotentialen zu lösen.

$$v_{(0)\mu} = \left(\frac{A}{r} - \frac{m_1 - m_2}{m} D \right) g_\mu + \left(\frac{A}{4} r^2 + B \right) \phi_{\mu\tau} g_\tau$$

$$P_{(0)} = \frac{3}{2} A \gamma \phi_\lambda g_\lambda$$

mit $A = G^{(w)} DR$

$B = - \frac{DR^2}{4} (G^{(w)} + 2 G^{(v)})$

$$\begin{aligned} v_{(0)\mu} = & \frac{3A}{28} (r^2 - R^2) H_{\mu\nu, \mu'\nu'}^\eta \phi_{\nu\nu'} \dot{g}_{\mu'} \\ & - \frac{A}{14} (r^2 - R^2) H_{\mu\nu, \mu'\nu}^\eta \phi_{\mu'\tau} \dot{g}_\tau \\ & - \frac{13A}{280} (r^2 - R^2) H_{\lambda\nu, \mu'\nu}^\eta \phi_{\mu\lambda} \dot{g}_{\mu'} \\ & + \left[\frac{3A}{560} (r^2 - R^2) + \frac{B}{14} (r^2 - R^2) \right] H_{\mu\nu, \mu'\nu'}^\eta \phi_{\nu\mu'\nu'\tau} \dot{g}_\tau \\ & + \left[- \frac{3A}{560} (r^2 - R^2) - \frac{B}{56} (r^2 - R^2) + \frac{3AR^2}{224} (r^2 - R^2) \right] H_{\lambda\nu, \mu'\nu}^\eta \phi_{\mu\nu\mu'\nu'} \dot{g}_\lambda \end{aligned}$$

$$n = 1, 3$$

$$\begin{aligned} P_{(0)} = & \frac{9A\gamma}{20} H_{\lambda\nu, \mu'\nu}^\eta \phi_\lambda \dot{g}_{\mu'} \\ & + \left[\frac{A\gamma}{80} (15R^2 - 12r^2) - \frac{B\gamma}{4} \right] H_{\lambda\nu, \mu'\nu'}^\eta \phi_{\nu\mu'\nu'} \dot{g}_\lambda \end{aligned}$$

(Die Klammern unter den Indizes sind nur Hinweise auf Verjüngung)

$$\begin{aligned}
 U_{(\mu)\mu}(x) = & -\frac{A}{18}(r^2-R^2) & H_{\mu\nu,\mu'\nu'}^{\mu} & \Phi_{\mu'\nu'} & \dot{g}_{\nu} \\
 & +\frac{5A}{36}(r^2-R^2) & H_{\mu\nu,\mu'\nu'}^{\mu} & \Phi_{\nu\nu'} & \dot{g}_{\mu'} \\
 & -\frac{5A}{126}(r^2-R^2) & H_{\mu\nu,\mu'\nu'}^{\mu} & \Phi_{\mu'\tau} & \dot{g}_{\tau} \\
 & +\frac{A}{72}(r^2-R^2) & H_{\lambda\nu,\mu'\nu'}^{\mu} & \Phi_{\mu\lambda} & \dot{g}_{\mu'} \\
 & +\frac{A}{63}(r^2-R^2) & H_{\lambda\nu,\mu'\nu'}^{\mu} & \Phi_{\lambda\mu'} & \dot{g}_{\mu} \\
 & +\frac{19A}{1260}(r^2-R^2) & H_{\lambda\nu,\mu'\nu'}^{\mu} & \Phi_{\mu\tau} & \dot{g}_{\tau} \\
 + \left[\frac{3A}{880}(r^4-R^4) + \frac{B}{22}(r^2-R^2) \right] & H_{\mu\nu,\mu'\nu'}^{\mu} & \Phi_{\nu\mu'\nu'\tau} & \dot{g}_{\tau} \\
 + \left[\frac{3A}{880}(r^4-R^4) - \frac{AR^2}{96}(r^2-R^2) + \frac{B}{264}(r^2-R^2) \right] & H_{\lambda\nu,\mu'\nu'}^{\mu} & \Phi_{\mu\nu\mu'\nu'} & \dot{g}_{\lambda} \\
 + \left[-\frac{3A}{6160}(r^4-R^4) - \frac{B}{154}(r^2-R^2) \right] & H_{\lambda\nu,\mu'\nu'}^{\mu} & \Phi_{\lambda\nu\mu'\nu'} & \dot{g}_{\mu} \\
 + \left[\frac{3A}{1540}(r^4-R^4) + \frac{AR^2}{336}(r^2-R^2) - \frac{13B}{924}(r^2-R^2) \right] & H_{\lambda\nu,\mu'\nu'}^{\mu} & \Phi_{\mu\lambda\mu'\tau} & \dot{g}_{\tau} \\
 + \left[\frac{A}{22176}(r^4-R^4) + \frac{B}{792}(r^2-R^2) - \left(\frac{3AR^2}{12320} - \frac{BR^2}{308} \right)(r^2-R^2) \right] & H_{\lambda\nu,\mu'\nu'}^{\mu} & \Phi_{\mu\lambda\nu\mu'\nu'\tau} & \dot{g}_{\tau}
 \end{aligned}$$

$$n = 2, 4$$

$$\begin{aligned}
 P_{(\mu)}(x) = & \frac{A}{42} \eta & H_{\lambda\nu,\mu'\nu'}^{\mu} & \Phi_{\tau} & \dot{g}_{\tau} \\
 & -\frac{9A}{140} \eta & H_{\lambda\nu,\mu'\nu'}^{\mu} & \Phi_{\lambda} & \dot{g}_{\mu'} \\
 + \left[\frac{A\eta}{12}(r^2-\frac{7}{4}R^2) - \frac{B}{36}\eta \right] & H_{\lambda\nu,\mu'\nu'}^{\mu} & \Phi_{\nu\mu'\nu'} & \dot{g}_{\lambda} \\
 + \left[-\frac{A\eta}{3}\left(\frac{r^2}{5}-\frac{R^2}{8}\right) - \frac{5B}{18}\eta \right] & H_{\lambda\nu,\mu'\nu'}^{\mu} & \Phi_{\lambda\mu'\tau} & \dot{g}_{\tau} \\
 + \left[\frac{A\eta}{112}\left(\frac{r^4}{3}+\frac{3R^4}{5}\right) + \frac{B\eta}{2}\left(\frac{r^2}{5}+\frac{R^2}{7}\right) \right] & H_{\lambda\nu,\mu'\nu'}^{\mu} & \Phi_{\lambda\nu\mu'\nu'\tau} & \dot{g}_{\tau}
 \end{aligned}$$

(Die Klammern unter den Indizes sind nur Hinweise auf Verjüngung)

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{(4)u} = & \frac{\sigma^{(u)} DR}{2} (\sigma_A - 1) \quad \varepsilon_{\mu\lambda\nu} h_\lambda \Phi \quad \dot{g}_\nu \\ & - \frac{\sigma^{(u)} DR}{2} R^2 \sigma_A \quad \varepsilon_{\mu\lambda\nu} h_\lambda \Phi_{\nu\tau} \quad \dot{g}_\tau \\ & \frac{\sigma^{(u)} DR}{8} \left((\sigma_A - 1) r^2 + (3 - 5\sigma_A) R^2 \right) \quad \varepsilon_{\rho\lambda\nu} h_\lambda \Phi_{\rho\sigma} \quad \dot{g}_\nu \end{aligned}$$

$$\tilde{P}_{(4)} = \frac{3\sigma^{(u)} DR}{4} (\sigma_A - 1) \eta \quad \varepsilon_{\rho\lambda\nu} h_\lambda \Phi_\rho \quad \dot{g}_\nu$$

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{(2)u} = & \frac{1}{10} \sigma^{(u)} DR (\sigma_3 - 1) \frac{1}{r} \quad \dot{g}_\mu \\ & \frac{7}{10} \sigma^{(u)} DR (\sigma_3 - 1) \frac{1}{r} \quad h_\mu h_\lambda \quad \dot{g}_\lambda \\ & \left[\frac{1}{40} \sigma^{(u)} DR (\sigma_3 - 1) r^2 + \frac{\sigma^{(u)} DR^3}{40} \left(\frac{13}{7} \sigma_3 + 3 \right) \right] \quad \Phi_{\mu\tau} \quad \dot{g}_\tau \\ & \left[\frac{7}{40} \sigma^{(u)} DR (\sigma_3 - 1) r^2 + \frac{\sigma^{(u)} DR^3}{40} \left(21 - \frac{49}{7} \sigma_3 \right) \right] \quad h_\mu h_\lambda \quad \Phi_{\mu\kappa} \quad \dot{g}_\lambda \\ & - \frac{5}{14} \sigma^{(u)} DR^3 \sigma_3 \quad h_\mu h_\nu \quad \Phi_{\nu\tau} \quad \dot{g}_\tau \\ & \frac{1}{14} \sigma^{(u)} DR^3 \sigma_3 \quad h_\mu h_\nu \quad \Phi_{\mu\nu} \quad \dot{g}_\mu \\ & \left[- \frac{1}{28} \sigma^{(u)} DR^3 \sigma_3 r^2 + \frac{1}{20} \sigma^{(u)} DR^5 \sigma_3 \right] \quad h_\mu h_\nu \quad \Phi_{\mu\nu\tau} \quad \dot{g}_\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{(2)} = & \frac{3}{20} \sigma^{(u)} DR (\sigma_3 - 1) \eta \quad \Phi_\tau \quad \dot{g}_\tau \\ & \frac{21}{20} \sigma^{(u)} DR (\sigma_3 - 1) \eta \quad h_\mu h_\lambda \quad \Phi_\mu \quad \dot{g}_\lambda \\ & - \frac{1}{2} \sigma^{(u)} DR^3 \sigma_3 \eta \quad h_\mu h_\nu \quad \Phi_{\mu\nu} \quad \dot{g}_\tau \end{aligned}$$

§ 14 Die Senftleben - Beenakker - Korrekturen zur diffusiophoretischen Kraft

und zur Stokeskraft

Mit den Ergebnissen des vorigen Paragraphen sind wir endlich in der Lage die diffusiophoretische Kraft auf eine ruhende Kugel im Magnetfeld anzugeben. Mit den Ansätzen 13.11 für $\underline{v}$ und P erhalten wir aus 13.1 und 12.11 den Ausdruck für die Kraft:

14.1

$$\begin{aligned}
 K_{\mu} = & \int \left(\frac{\partial v_{(n)\mu}}{\partial x_r} \hat{x}_r d\sigma - \int P_{(n)} \hat{x}_u d\sigma \right. \\
 & + \sum_{n=2,4} \delta_{(n)} \left(\int \left(\eta_{(n)} \frac{\partial v_{(n)\mu}}{\partial x_r} \hat{x}_r d\sigma + \eta_{(n)} H_{\mu\nu, \mu'r'}^{(n)} \right) \frac{\partial v_{(n)\mu'}}{\partial x_{r'}} \hat{x}_r d\sigma - \int P_{(n)} \hat{x}_u d\sigma \right) \\
 & + \sum_{n=1,3} \delta_{(n)} \left(\int \left(\eta_{(n)} \frac{\partial v_{(n)\mu}}{\partial x_r} \hat{x}_r d\sigma + \eta_{(n)} H_{\mu\nu, \mu'r'}^{(n)} \right) \frac{\partial v_{(n)\mu'}}{\partial x_{r'}} \hat{x}_r d\sigma - \int P_{(n)} \hat{x}_u d\sigma \right) \\
 & + \beta_{(1)} \left(\int \left(\eta_{(1)} \frac{\partial \tilde{v}_{(1)\mu}}{\partial x_r} \hat{x}_r d\sigma - \int P_{(1)} \hat{x}_u d\sigma \right) \right. \\
 & \left. + \beta_{(2)} \left(\int \left(\eta_{(2)} \frac{\partial \tilde{v}_{(2)\mu}}{\partial x_r} \hat{x}_r d\sigma - \int P_{(2)} \hat{x}_u d\sigma \right) \right) \right) .
 \end{aligned}$$

Darin sind die Lösungen des vorigen Paragraphen einzusetzen und wir können nach Ausführung aller notwendigen Differentiationen und Integrationen das Endergebnis aufschreiben. Durch die auf Seite 56 erwähnte Ersetzung $\sigma^{(v)} = 0$, $D \underline{g} (m_1 - m_2)/m = \underline{v}^{\text{Kugel}}$ und damit $\sigma^{(v)} D \underline{g} = \underline{v}^{\text{Kugel}}$ bekommen wir auch die durch das Magnetfeld modifizierte Stokesformel. Wegen

$$\int \hat{x}_r \frac{\partial}{\partial x_r} \left(f(r) \phi_{\mu_1 \dots \mu_n} \right) d\sigma = 0 \quad f_{\mu_1 \dots \mu_n} \neq 0$$

können in 14.1 die Ausdrücke $\int \frac{\partial v_{(n)}}{\partial x_r} \hat{x}_r d\sigma \quad n=2,4$ und $\int \frac{\partial \tilde{v}_{(n)}}{\partial x_r} \hat{x}_r d\sigma \quad n=1,3$ sofort Null gesetzt werden.

$$\begin{aligned}
 - \underline{K}_d &= 6\pi R \eta \sigma^{(w)} D \underline{g} & + & 6\pi R \eta^* \sigma^{(w)} D_{iso} \underline{g} & + & 6\pi R \eta_{iso} \sigma^{(v)} (D_{\parallel} - D_{\perp}) \underline{g} & \frac{\sigma_s - 1}{10} \\
 & + 6\pi R \eta_{trans} \sigma^{(w)} D_{iso} (\underline{h} \times \underline{g}) & + & 6\pi R \eta_{trans} \sigma^{(v)} D_{trans} (\underline{h} \times \underline{g}) & \frac{\sigma_A - 1}{2} \\
 & + 6\pi R \eta^{**} \sigma^{(w)} D_{iso} \underline{h} \cdot \underline{g} & + & 6\pi R \eta_{iso} \sigma^{(v)} (D_{\parallel} - D_{\perp}) \underline{h} \cdot \underline{g} & \frac{7(\sigma_g - 1)}{10}
 \end{aligned}$$

Übergang zur Stokeskraft $\sigma^{(v)} = 0$ $\sigma^{(w)} D \underline{g}_u = \underline{\dot{v}}_u^{Kugel}$

$$\begin{aligned}
 - \underline{K}_{Stokes} &= 6\pi R \eta \underline{\dot{v}}^{Kugel} & + & 6\pi R \eta^* \underline{\dot{v}}^{Kugel} \\
 & + 6\pi R \eta_{trans} (\underline{h} \times \underline{\dot{v}}^{Kugel}) \\
 & + 6\pi R \eta^{**} \underline{h} \cdot \underline{\dot{v}}^{Kugel}
 \end{aligned}$$

Von all diesen Korrekturen sind nur die Transversalteile meßbar. Bei ausgeglichener Vertikalkraft bewegt sich somit ein Aerosolteilchen bei einem Magnetfeld senkrecht zur Rohrachse in einer Versuchsanordnung nach Abb. 1 mit einer Transversalggeschwindigkeit vom Betrage :

$$14.4 \quad v_{\text{Diff}}^{\text{trans}} = G^{(w)} D_{\text{iso}} g \frac{\eta_{\text{trans}}}{\eta_{\text{iso}}} + G^{(v)} D_{\text{trans}} g \frac{G_R - 1}{2}$$

$$G^{(w)} = G^{(v)} + \frac{m_1 - m_2}{m} \quad m = \frac{g}{n} .$$

Eine mit v_{Kugel} parallel zur Rohrachse bewegtes Aerosolteilchen bekommt bei abgeschalteten Diffusionsstrom eine Transversalkomponente der Geschwindigkeit vom Betrage

$$v_{\text{Stokes}}^{\text{trans}} = v_{\text{Kugel}} \frac{\eta_{\text{trans}}}{\eta_{\text{iso}}} .$$

Die auftretenden Viskositäten sind dabei folgende Kombinationen aus geläufigeren Hess'schen Reibungskoeffizienten. (Siehe letzte Seite im Anhang).

$$\eta^* = \frac{1}{3870} \left(274 \eta_{\text{Hess}}^{(11)} + 1173 \eta_{\text{Hess}}^{(12)} - 1447 \eta_{\text{Hess}}^{(22)} \right)$$

$$\eta_{\text{trans}} = \frac{3}{10} \left(\eta_{\text{Hess}}^{(13)} + 4 \eta_{\text{Hess}}^{(23)} \right)$$

$$\eta^{**} = \frac{13}{210} \left(2 \eta_{\text{Hess}}^{(11)} + 3 \eta_{\text{Hess}}^{(12)} - 5 \eta_{\text{Hess}}^{(22)} \right)$$

Für $H = 0$ gilt : $\eta_{\text{Hess}}^{(11)} = \eta_{\text{Hess}}^{(12)} = \eta_{\text{Hess}}^{(22)}$ und $\eta_{\text{Hess}}^{(13)} = \eta_{\text{Hess}}^{(23)} = 0$
und somit

$$\eta_{H=0}^* = \eta_{H=0}^{\text{trans}} = \eta_{H=0}^{**} = 0 .$$

Damit sind wir in der Lage ein Experiment vorzuschlagen, das direkt am Transversaleffekt der Diffusion und der Viskosität angreift.

Anmerkung:

Für $\sigma_A = \sigma_S = 1$ geht die Randbedingung 13.8 in

$$v_R = G^{(v)} \frac{n_1^{(v)} n_2^{(v)}}{n_1^3} \underline{v}_{nR}^{\text{tang}}$$

über. Zusammen mit 13.5, der Randbedingung im Unendlichen und $\text{div } \underline{v} = 0$ liegen formal die gleichen Differentialgleichungen und Randbedingungen für die mittlere Massengeschwindigkeit $\underline{v}$ vor, wie im Fall ohne Magnetfeld. Deshalb muß für diesen Fall der zweite Term in 14.4 verschwinden.

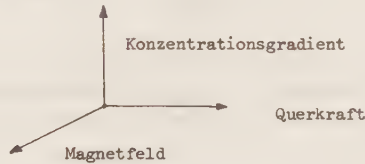
§ 15 Vorschlag eines Experimentes zur Messung des Senftleben-Beenakker-Effektes

der Diffusion und der Viskosität

Bevor wir uns überlegen, wie die bisherigen Betrachtungen in einem Experiment verwertet werden können, wollen wir einmal kurz zusammenfassen.

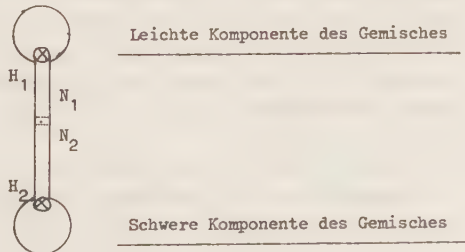
Auf ein Aerosolteilchen, das sich im Diffusionsfeld zweier ineinander diffundierender Gase befindet, wirkt eine Kraft, die das Aerosolteilchen in die Richtung des Stromes der schweren Komponente treibt. (Diffusiophorese, K.H. Schmitt und L. Waldmann (1960))

Besteht mindestens eine Komponente des Gasgemisches aus Spinteilchen, deren Spin mit einem magnetischen Moment verknüpft ist, so sollte das Aerosolteilchen zusätzlich zur bereits beobachteten diffusiophoretischen Kraft, beim Anlegen eines homogenen Magnetfeldes, eine Querkraft erfahren, die sowohl senkrecht auf dem Magnetfeld als auch senkrecht zum Konzentrationsgradienten des diffundierenden Gasgemisches steht.

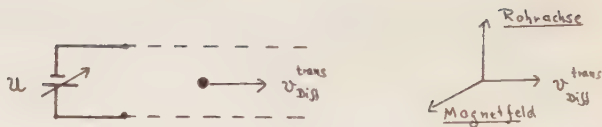


Diese Querkraft erzeugt eine Transversalbewegung deren Geschwindigkeit mit dem Transversalterm des Diffusionstensors D_{trans} und mit dem des Viskositätstensors η_{trans} zusammenhängt. Ziel ist es diese beiden Transversalterme zu messen. Es soll eine Apparatur von Schmitt und Waldmann (1960) verwendet werden.

Abb. 1



Versuch 1 :



Nach Öffnen der Hähne H_1 und H_2 beginnt der Diffusionsprozeß mit vertikalem Molenbruchgradienten. Ein bestimmtes mit dem Mikroskop ins Auge gefaßtes, elektrisch geladenes Aerosolteilchen wird sich infolge der diffusiophoretischen Kraft vertikal in Bewegung setzen. Durch eine geeignete Spannung U an den Kondensatornetzen kompensiere man diese vertikale diffusiophoretische Kraft, so daß das beobachtete Teilchen zum Schweben kommt. - Nach der in dieser Arbeit entwickelten Theorie sollte nun beim Einschalten eines homogenen Magnetfeldes senkrecht zur Rohrachse und parallel zur Beobachtungsrichtung eine Transversalbewegung senkrecht zum Magnetfeld und senkrecht zum Molenbruchgradienten zustande kommen. Gemessen wird

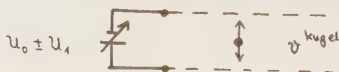
$$v_{Diff}^{trans}$$

Gemäß 14.4 hängt diese Geschwindigkeit nicht nur mit dem interessierenden Transversalterm der Diffusion D_{trans} , sondern auch mit dem der Viskosität η_{trans} zusammen. Wir brauchen deshalb noch ein Experiment um η_{trans} messen zu können.

Versuch 2 :

Man behalte das gleiche Aerosolteilchen im Auge und schalte durch Schließen der Hähne H_1 und H_2 den Diffusionsstrom ab. Infolge der Schwerkraft wird das Aerosolteilchen dann im homogenem Gemisch nach unten sinken. Durch eine Grundspannung U_0 kann diese Schwerkraft kompensiert werden, so daß unser Aerosolteilchen wieder schwebt. Durch Anlegen einer Zusatzspannung $\pm U_1$ an die Kondensatornetze bewege man das elektrisch geladene Aerosolteilchen mit konstanter Geschwindigkeit vom Betrage v_{Kugel} sowohl nach oben als auch nach unten. (Stokesbewegung)

Mit einem Zeitschalter kann die Umpolung $\pm U_1$ so vorgenommen werden, daß das beobachtete Aerosolteilchen immer zwischen den Kondensatornetzen bleibt. Gemessen werde der Betrag der vertikalen Geschwindigkeit v_{Kugel} .



Versuch 3 :

Durch ein äußeres Magnetfeld, wieder senkrecht zur Rohrachse und parallel zur Beobachtungsrichtung, sollte nun eine transversale Geschwindigkeitskomponente auftreten. Da man erwartet, daß $v_{\text{Stokes}}^{\text{trans}} / v_{\text{Kugel}} \leq 10^{-3}$, kippen wir gleichzeitig mit der Umpolung der elektrischen Zusatzspannung $\pm U_1$ die Richtung des Magnetfeldes um, so daß die Geschwindigkeit quer zur Rohrachse ihre Richtung beibehält. Mit vielen Auf- und Abbewegungen werde dann $v_{\text{Stokes}}^{\text{trans}}$ gemessen.



Das Verhältnis $v_{\text{Stokes}}^{\text{trans}} / v_{\text{Kugel}}$ gibt direkt den Transversalterm der Viskosität:

$$\frac{v_{\text{Stokes}}^{\text{trans}}}{v_{\text{Kugel}}} = \frac{\eta_{\text{trans}}}{\eta_{\text{iso}}} \quad .$$

Die Lorentz-Kraft auf ein geladenes bewegtes Aerosolteilchen steht senkrecht auf dem Magnetfeld und der Geschwindigkeit dieser Teilchen, so daß bei diesen Versuchen das Aerosolteilchen nicht aus der Beobachtungsebene herausgebracht wird. Gegenüber den anderen wirksamen Kräften auf unser Teilchen kann sie infolge der kleinen Geschwindigkeiten ohne weiteres vernachlässigt werden.

A n h a n g

Zur Berechnung der Viskosität eines reinen Gases aus Spinteilchen haben Hess. und Waldmann (7) folgende Operatoren eingeführt

$$P_{\mu\nu}^{(h)} = h_\mu h_\nu \quad P_{\mu\nu}^{(a)} = \delta_{\mu\nu} - h_\mu h_\nu \quad P_{\mu\nu}^{(s)} = \varepsilon_{\mu\lambda\nu} h_\lambda$$

und damit

$$\tilde{Q}_{\mu\nu, \mu'\nu'}^{(ik)} = \frac{1}{2} \Delta_{\mu\nu, \lambda\varrho} \left(P_{\lambda\lambda'}^{(i)} P_{\varrho\varrho'}^{(k)} + P_{\lambda\lambda'}^{(k)} P_{\varrho\varrho'}^{(i)} \right) \Delta_{\lambda'\varrho', \mu'\nu'}$$

so daß sich der Viskositätstensor $\underline{\eta}$, dessen beide Indexpaare symmetrisch-irreduzibel sind, in diesen $\tilde{Q}^{(ik)}$ folgendermaßen schreibt:

$$\underline{\eta} = 1 \underline{\tilde{Q}}^{(4)} + 2 \eta^{(42)} \underline{\tilde{Q}}^{(2)} + 1 \underline{\tilde{Q}}^{(22)} + 2 \eta^{(43)} \underline{\tilde{Q}}^{(3)} + 2 \underline{\tilde{Q}}^{(23)}$$

Diese Operatoren sind besonders günstig, um die experimentelle Bedeutung der Viskositätskoeffizienten zu sehen. Wir wollen aus diesem Grunde den Zusammenhang zwischen den $H_{\mu\nu, \mu'\nu'}^{(n)}$ dieser Arbeit und den $\tilde{Q}_{\mu\nu, \mu'\nu'}^{(ik)}$ angeben.

$\tilde{Q}^{(4)} = \frac{2}{3} H^0 + \frac{5}{6} H^2 + \frac{1}{6} H^4$ $\tilde{Q}^{(2)} = -\frac{2}{3} H^2 - \frac{1}{6} H^4$ $\tilde{Q}^{(22)} = \frac{1}{3} H^0 + \frac{1}{2} H^2 + \frac{1}{6} H^4$	$H^0 = \tilde{Q}^{(4)} + 2 \tilde{Q}^{(2)} + \tilde{Q}^{(22)}$ $H^2 = 2 \tilde{Q}^{(4)} - 2 \tilde{Q}^{(2)} - 4 \tilde{Q}^{(22)}$ $H^4 = -8 \tilde{Q}^{(4)} + 2 \tilde{Q}^{(2)} + 16 \tilde{Q}^{(22)}$
$\tilde{Q}^{(43)} = \frac{2}{3} H^1 + \frac{1}{6} H^3$ $\tilde{Q}^{(23)} = -\frac{1}{6} H^1 - \frac{1}{8} H^3$	$H^1 = 2 \tilde{Q}^{(43)} + 2 \tilde{Q}^{(23)}$ $H^3 = -2 \tilde{Q}^{(43)} - 8 \tilde{Q}^{(23)}$

Mit dieser Transformationstabelle lassen sich leicht die η_{ik} auf die $\eta^{(ik)}$ umrechnen. Auf der nächsten Seite ist eine Zusammenstellung aller gebräuchlichen Viskositätskoeffizienten gegeben.

Symbole dieser Arbeit - Hess	Hess - Korving	Symbole dieser Arbeit - Korving
$\eta^{(6)} = \frac{2}{3} \eta^{(6)} + \frac{1}{3} \eta^{(22)}$ $\eta^{(2)} = \frac{5}{6} \eta^{(6)} - \frac{1}{3} \eta^{(1)} + \frac{1}{2} \eta^{(2)}$ $\eta^{(4)} = \frac{1}{6} \eta^{(6)} - \frac{1}{3} \eta^{(2)} + \frac{1}{6} \eta^{(22)}$	$\eta^{(6)} = 2 \eta_1 - \eta_2$ $\eta^{(2)} = \eta_3$ $\eta^{(22)} = 2 \eta_2 - \eta_4$	$\eta^{(6)} = \eta_1$ $\eta^{(2)} = \frac{7}{6} \eta_1 + \frac{1}{6} \eta_2 - \frac{1}{3} \eta_3$ $\eta^{(4)} = \frac{4}{6} \eta_1 + \frac{1}{6} \eta_2 - \frac{1}{3} \eta_3$
$\eta^{(6)} = \frac{1}{3} \eta^{(12)} - \frac{1}{3} \eta^{(13)}$ $\eta^{(6)} = \frac{1}{3} \eta^{(10)} - \frac{1}{3} \eta^{(13)}$	$\eta^{(6)} = \eta_5$ $\eta^{(13)} = -\eta_4$	$\eta^{(6)} = \frac{1}{3} \eta_5 + \frac{1}{3} \eta_4$ $\eta^{(10)} = \frac{1}{3} \eta_5 + \frac{1}{3} \eta_4$
Hess - Symbole dieser Arbeit	Korving - Hess	Korving - Symbole dieser Arbeit
$\eta^{(6)} = \eta^{(6)} + 2 \eta^{(2)} - 8 \eta^{(4)}$ $\eta^{(2)} = \eta^{(6)} - \eta^{(2)} + \eta^{(4)}$ $\eta^{(22)} = \eta^{(6)} - 4 \eta^{(2)} + 16 \eta^{(4)}$	$\eta_1 = \frac{2}{3} \eta^{(1)} + \frac{1}{3} \eta^{(22)}$ $\eta_2 = \frac{2}{3} \eta^{(22)} + \frac{1}{3} \eta^{(4)}$ $\eta_3 = \eta^{(2)}$ $\eta_4 = -\eta^{(22)}$ $\eta_5 = \eta^{(4)}$	$\eta_1 = \eta^{(6)}$ $\eta_2 = \eta^{(6)} - 2 \eta^{(2)} + 8 \eta^{(4)}$ $\eta_3 = \eta^{(6)} - \eta^{(2)} + \eta^{(4)}$ $\eta_4 = 4 \eta^{(2)} - \eta^{(6)}$ $\eta_5 = \eta^{(4)} - \eta^{(2)}$

$$(nm) = (11), (12), (22)$$

$$\eta_{Hess}^{(nm)} = \eta_{iso} \left(1 + \frac{n^{(0)} \cdot x_{+2}^{(n)} \cdot \omega_{+2}^{(n)} \cdot \overline{F}^{(nm)} \left(\varphi_{+2}^{(59)} \right) \cdot x_{+2}^{(59)} \cdot \omega_{+2}^{(59)} \cdot L^{(61)}}{n^{(0)} \cdot L^{(4)}} \right)$$

$$(nm) = (13), (23)$$

$$\eta_{Hess}^{(nm)} = \eta_{iso} \frac{n^{(0)} \cdot x_{+2}^{(n)} \cdot \omega_{+2}^{(n)} \cdot \overline{F}^{(nm)} \left(\varphi_{+2}^{(55)} \right) \cdot x_{+2}^{(55)} \cdot \omega_{+2}^{(55)} \cdot L^{(61)}}{n^{(0)} \cdot L^{(4)}}$$

$$\overline{F}^{(11)}(\varphi) = 1 + \frac{2\varphi^2}{1 + 4\varphi^2}$$

$$\overline{F}^{(12)}(\varphi) = \frac{1}{1 + \varphi^2}$$

$$\overline{F}^{(13)}(\varphi) = - \frac{\varphi}{1 + \varphi^2}$$

$$\overline{F}^{(22)}(\varphi) = \frac{1}{1 + 4\varphi^2}$$

$$\overline{F}^{(23)}(\varphi) = - \frac{\varphi}{1 + 4\varphi^2}$$

(Die $\tilde{\eta}_{Hess}^{(nm)}$ bekommt man, indem man $L^{(4)} \eta_{iso}$ durch $\tilde{L}^{(4)} \tilde{\eta}_{iso}$ ersetzt.)

Wenn nur die erste Sorte aus Spinteilchen besteht: $\varphi = \frac{\omega_{H1}}{\omega_{(55)} \eta_{+2}}$

$$\eta_{Hess}^{(11)} = \eta_{iso} \left(1 + A_{+2}^{(15)} \left(1 + \frac{2\varphi^2}{1 + 4\varphi^2} \right) \right)$$

$$\eta_{Hess}^{(12)} = \eta_{iso} \left(1 + A_{+2}^{(19)} \frac{1}{1 + \varphi^2} \right)$$

$$\eta_{Hess}^{(13)} = - A_{+2}^{(16)} \frac{\varphi}{1 + \varphi^2}$$

$$\eta_{Hess}^{(22)} = \eta_{iso} \left(1 + A_{+2}^{(19)} \frac{1}{1 + 4\varphi^2} \right)$$

$$\eta_{Hess}^{(23)} = - \eta_{iso} A_{+2}^{(16)} \frac{\varphi}{1 + 4\varphi^2}$$

$$A_{+2}^{15} = \frac{\left(n^{(0)} \cdot x_{+2}^{(n)} \cdot \omega_{+2}^{(n)} \right)_1 \left(x_{+2} \omega_{+2}^{(51)} \cdot L^{(11)} \right)_1}{\omega_{+2}^{(55)} \eta_{+2} n^{(0)} \cdot L^{(4)}}$$

Literatur

A Originalarbeiten

- (1) F.R.Mc.Court and F.R.Snider, J.Chem.Phys. 47 (1967) 4117
- (2) Yu.Kagan and L.Maksimov, Soviet Physics JEPT 14 (1962) 604
- (3) S.Hess and L.Waldmann, Z.Naturforsch. 21a (1966) 1529
- (4) s.Hess, Definitionen und Formeln zu Tensorrechnung, unveröff. (1967)
- (5) S.Hess and W.E.Köhler, Z.Naturforsch. ... (1968) ...
- (6) S.Hess and L.Waldmann, Z.Naturforsch. ... (1968) ...
- (7) S.Hess and L.Waldmann, Wärmeleitung u. Viskosität to be published
- (8) K.H.Schmitt und L.Waldmann, Z.Naturforsch. 15a (1960) 843
- (9) H.Senftleben und H.Schult, Ann.Physik 7 (1950) 103
- (10) A.Tip, A.E.De Vries and L.Los, Physica 32 (1966) 1429
- (11) H.F.Vuğts, A.Tip and J.Los, Physica 38 (1968) 579
- (12) L.Waldmann, Z.Naturforsch. 12a (1957) 660
- (13) L.Waldmann, Z.Naturforsch. 15a (1960) 19
- (14) L.Waldmann and H.D.Kupatt, Z.Naturforsch. 18a (1963) 86
- (15) L.Waldmann, Z.Naturforsch. 18a (1963) 1033

B Zusammenfassende Darstellungen

J.J.M.Beenakker, The Influence of Electric and Magnetic Fields on the Transport-Properties of Polyatomic Dilute Gases,
in: Festkörperprobleme VIII, ed.O.Madelung, Vieweg (1968)

L.Waldmann, Transporterscheinungen in Gasen von mittleren Druck,
in: Handbuch der Physik, ed. S.Flügge, vol.12, Berlin-Heidelberg (1958)

L.Waldmann and

K.H.Schmitt, Thermophoresis and Diffusiophoresis of Aerosols,
in: Aerosol-Science, Academic Press, Inc. London (1966) (Chap VI)

L.Waldmann Kinetic Theory of Dilute Gases with Internal Degrees of Freedom,
in: Fundamental Problems in Statistical Mechanics II,
ed.E.G.D.Cohen, North Holland, Amsterdam (1968)

Lebenslauf

Am 6. September 1940 wurde ich, Hilmar Horst Raum, als erstes Kind des städtischen Angestellten Georg Raum und seiner Ehefrau Friede Raum, geb. Prinz in Nürnberg geboren. Beide Elternteile sind ev.-lutherischen Bekenntnisses.

Im September 1946 trat ich in die Volksschule Cadolzburg/Bay. ein und gehörte dieser fünf Schuljahre an. Ab September 1951 besuchte ich die Oberrealschule in Fürth/Bay. und legte dort nach weiteren neun Schuljahren die Reifeprüfung ab.

Das Studium der Mathematik und Physik begann ich im W.S. 1960/61 an der Universität Erlangen-Nürnberg und setzte es im S.S. 1961 an der Universität Marburg/Lahn fort. Mit Beginn des W.S. 1961/62 kehrte ich wieder an die Universität Erlangen-Nürnberg zurück und bestand dort die Diplomvorprüfung für Physiker. Bis zur Diplomhauptprüfung im Juli 1964 war ich studentische Hilfskraft am Institut für Theoretische Physik der Universität Erlangen-Nürnberg.

Am 18. August 1964 heiratete ich Frl. Ingeborg Grünbaum aus Cadolzburg. Ab 1. September 1964 wurde ich mit den Dienstgeschäften des Verwalters einer wissenschaftlichen Assistentenstelle betreut.

Ab September 1964 weilte ich für ein akademisches Jahr an der University of Minnesota in Minneapolis, U.S.A. Dort war ich als "graduate student" am Department of Chemical Engineering eingeschrieben und gleichzeitig "teaching assistant" für Mathematik.

Im September 1965 nahm ich meine Tätigkeit am Institut für Theoretische Physik der hiesigen Universität wieder auf.

Erlangen, Oktober 1968

Hilmar R a u m

Offsetdruck-Fotodruck

J. Hogl, 852 Erlangen, Hauptstr. 109, (Nähe Martin-Luther-Platz) Tel. 22990
